Real Analysis

课程笔记

作者：Fir1247

组织：USTC

时间：July 21, 2023

版本：3.3

联系方式：fa1247@mail.ustc.edn.cn 或者 QQ：3105292483

测度论、积分论，还是“逼近论”？

目录

2 第 2 部分 * 相关习题

前言

本文档为 2023 年春季学期刘聪文老师的《实分析》课程笔记（教材为 Stein 的 Real Analysis）. 内容基于上课板书或讲义、习题课内容、作业题目。内容已经更新完毕，后续可能会修改出错的细节。

这是我第一次尝试记电子版笔记，没有养成良好的习惯，排版上的不合适之处包括但不限于：某些特殊常量没有用正体，例如 e^x 应当是 e^x；需要用斜体的某些变量因为忘了加 $ 仍然显示为正体；定理、命题、推论没有明确标准，我的懒惰导致通篇几乎都是定理；大段证明如果需要分步骤，那么格式稀烂，有时用 enumerate 环境有时分段标注 Step，而且 Step 还没有醒目的标识；由于对 enumerate 环境的不熟悉，在某次更新中把所有的序号改成了默认序号，但是引用时仍然采用的是原编号，目前仍然没有抽时间去重读和排编号...

但好消息是上述小细节都不影响文档的可读性，因为我期末复习就是照着它复习的（笑）。说实话，复习时并没有做很多题，因为看一道不会一道太打击自信心了，但是通过对整个实分析知识结构的梳理，我找到了这门课的一些“感觉”，期末考试临场发挥，拿到了不错的成绩。但是必须要强调的是，想要拿到接近满分的成绩仍然需要刷题，因为有很多技巧性的东西是需要刷题来积累的。[1]

尝试写了一些关于实分析的理解，但感觉都不够深刻，遂删除。“测度论，积分论，还是逼近论？”，这句话来自任助教的期末复习文档，我认为是很精辟的，于是就放在封面上了。在这里也向几位助教曾提供的帮助表达感谢，学数学要是独自一人啃书，对我而言是很折磨的。

其实原本想要到大三时带这门课的助教的，但这个想法最终还是被我否决了。一方面因为自己的解题能力确实不够，就算现在会写到时候可能就忘干净了；另一方面，我仍然认为考试的好成绩属于灵光乍现以及改卷放洪水，并不代表我的真实水平。我的学习方法大概帮不到大家，但是笔记可以，所以也不搞什么版权保护，可以随意转载，但请不要用于商用。

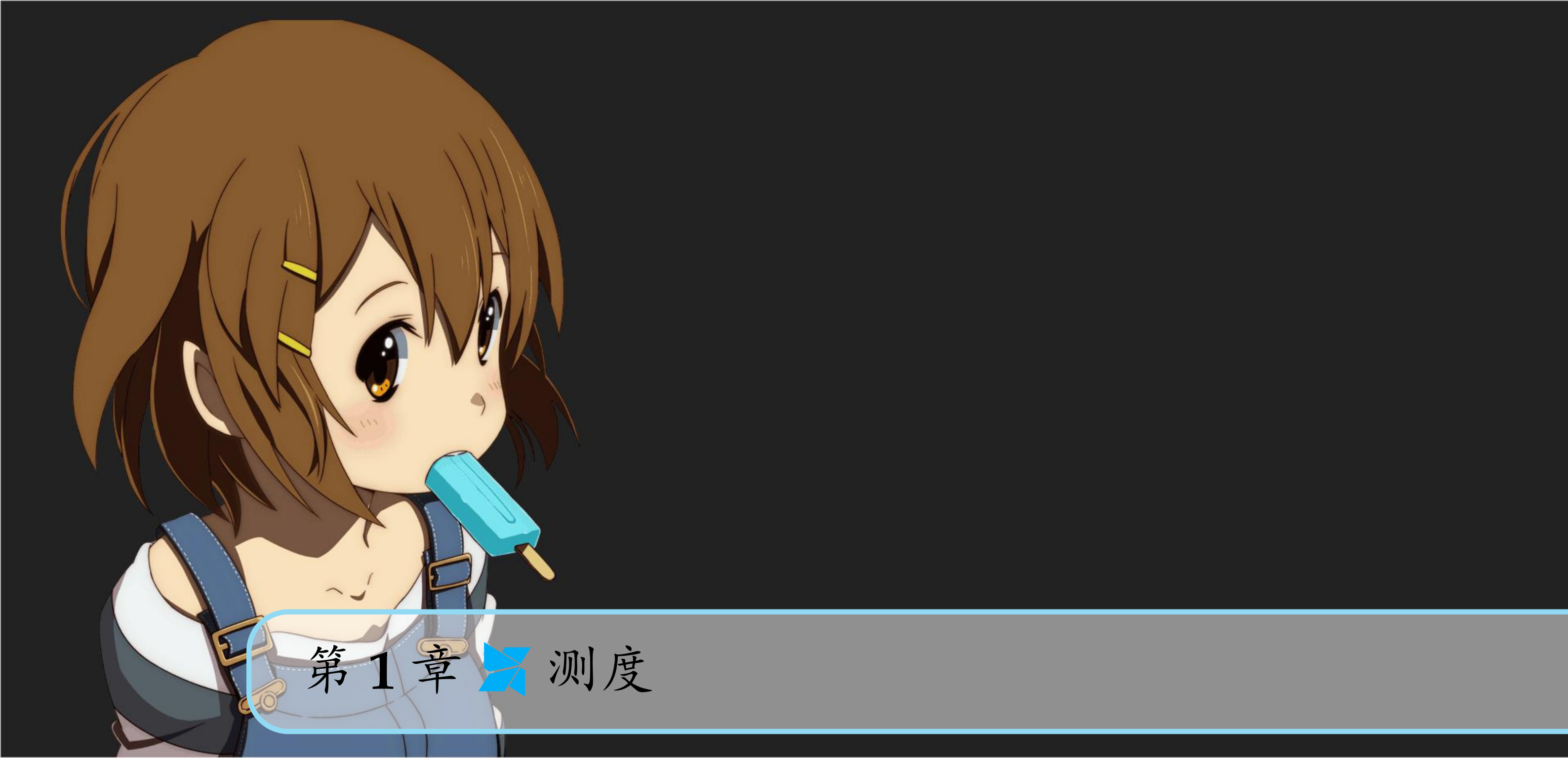
23.07.21：感谢某位同学指出了我 Fatou 引理的错误（我细读之后一度怀疑我当时到底在想什么，错的离谱）和另外一处笔误。这下暴露我复习没好好看 Fatou 引理证明的事实了。

Fir1247
July 21, 2023

[1]此处的考试特指中国科大的考试。

第一部分
课程笔记

第 1 部分目录



第 1 章 测度

对那些根据先前的思想可以定义的测度的集合我们称之为可测集；我们这样做并不应为这不可能对其他集合赋予一个测度。

——E.Borel, 1898

1.1 基础概念

定义 1.1.1

$\mathbb{R}^n$ 上的集合族 $\{E_n\}$，定义

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \{x : x \in E_k \text{对于无数个 } k \text{ 成立}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \{x : x \notin E_k \text{对于有限个 } k \text{ 成立}\}$$

命题 1.1.1 (用集合的运算来表示上下极限)

$$\{x : x \in E_k \text{对于无数个 } k \text{ 成立}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

$$\{x : x \notin E_k \text{对于有限个 } k \text{ 成立}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

证明

(1)

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k &\Rightarrow \forall n, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \\ &\Rightarrow \forall n, \exists m \geqslant n \text{ s.t. } x \in E_m \end{aligned}$$

我们按照如下方式选择：$n=1$ 时，$x \in E_{k_1}$，则考虑 $n = k_1 + 1$，$x \in E_{k_2}$ 且 $k_2 > k_1$，再考虑 $n = k_2 + 1$，

以此类推可以得到无穷多个 $k_1 < k_2 < \cdots$ 使得 $x \in E_{k_j}$，$j = 1, 2, \cdots$. 因此，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \subset \{x : x \in E_k \text{对于无数个 } k \text{ 成立}\}$$

反过来，考虑：

$$\begin{aligned} x \in \{x : x \in E_k \text{对于无数个 } k \text{ 成立}\} &\Rightarrow x \in E_{k_j}, j = 1, 2, \cdots \\ &\Rightarrow \forall n, \exists k_j \geqslant n \text{ i.e. } x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \end{aligned}$$

因此，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \supset \{x : x \in E_k \text{对于无数个 } k \text{ 成立}\}$$

进而二者相等。

(2)

$$\begin{aligned} x \in \{x : x \notin E_k \text{对于有限个 } k \text{ 成立}\} &\Leftrightarrow \exists N \text{ s.t. } x \in E_k, \forall k \geqslant N \\ &\Leftrightarrow \exists N \text{ s.t. } x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} E_k \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \end{aligned}$$

推论 1.1.1

$\liminf\limits_{n\to\infty} E_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$.

定义 1.1.2

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的开球为

$$B_r(x_0) = \{x \,||x - x_0| < r\}$$

这里的 $|\cdot|$ 为欧式度量。

定义 1.1.3

设 $A \subset \mathbb{R}^n$，如果 A 只包含内点，即

$$\forall x \in A, \exists r > 0 \; s.t. \; B_r(x) \subset A$$

称 A 为 $\mathbb{R}^n$ 上的开集。

定义 1.1.4

设 X 是非空集合，用 2^X 表示全体 X 的子集构成的子集族。

设 $\tau \subset 2^X$，如果

1. $\varphi, X \in \tau$;
2. $\forall A, B \in \tau, A \cap B \in \tau$，即对有限交封闭;
3. $\forall A_\alpha \in \tau, \alpha \in I, \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$，即对任意并封闭.

称 τ 是 X 上的拓扑，τ 中的元素称为 X 的开集，(X, τ) 称为拓扑空间。

例 1.1.

可以验证，$\mathbb{R}^n$ 上的一个拓扑结构为

$$\tau = \{B_r(x)|x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

这是由 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式度量结构自然引导的拓扑结构，我们称之为 $\mathbb{R}^n$ 上的开集结构，包含 $x \in \mathbb{R}^n$ 的开集 $B_r(x)$ 称为 x 的邻域，$B_r(x)\backslash\{x\}$ 称为其去心邻域。

定义 1.1.5

设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 $x \in E$ 满足其任意去心邻域都与 E 相交，称 x 为极限点或聚点，即

$$\forall r > 0, B_r(x)\backslash\{x\} \cap E \neq \varphi$$

其等价定义为

$$\exists\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to x.$$

这里极限的定义依托欧式度量

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

E 的聚点全体记作 E'，称为 E 的导集。E 的内点全体记作 E°，称为 E 的内部。记 $\overline{E} = E' \cup E$，称为 E 的闭包。记 $\partial E = \overline{E}\backslash E^\circ$，称为 E 的边界。

E 内不是聚点的点称为 E 的孤立点，如果 $E' \subset E$，称 E 为闭集，闭集的等价定义为补集是开集，如果一个闭集不包含孤立点，即 $E' = E$，称其为完全集。

闭集拥有与开集对偶的性质：闭集的有限并还是闭集，闭集的任意交还是闭集。称可数个闭集的并为 F_σ 集，可数个开集的交为 G_δ 集。例如有理数集 Q 就是 F_σ 集，无理数集就是 G_δ 集。E是F_σ集 $\Leftrightarrow E^c$是G_δ集。♣

注 可数个闭集的并集可能既不是闭集也不是开集，因此有 F_σ 集与 G_σ 集来描述这样的集合。

定义 1.1.6

X 是非空集合，$\mathcal{A} \subset 2^X$，如果

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$；
2. $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$，即对取补集封闭；
3. $\forall A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \cdots, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$，即对可数并封闭，这条性质也可以等价替换为对可数交封闭.

称 $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个 σ 代数。

设 $Y \subset 2^X$，包含 Y 的最小 σ 代数记作 $\sigma(Y)$，称为 Y 生成的 σ 代数。

$\mathbb{R}^n$ 上的全体开集生成的 σ 代数称为 Borelσ 代数，记作 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}$ 中的元素称为 Borel 集。开集、闭集、F_σ 集与 G_σ 集，乃至 F_σ 集的可数交、G_σ 集的可数并都是 Borel 集。♣

1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的开集结构

定理 1.2.1 ($\mathbb{R}$ 上的开集结构)

$\mathbb{R}$ 上的非空开集都可以唯一表示为至多可数个互不相交的开区间的并集。♡

证明 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的非空开集，$\forall x \in G, \exists r > 0, (x - r, x + r) \subset G$. 对于每个 $x \in G$，令

$$a_x = \inf\{a \in \mathbb{R}|(a, x) \subset G\}$$

$$b_x = \max\{b \in \mathbb{R}|(x, b) \subset G\}$$

a_x 可以是 $-\infty$，b_x 可以是 $+\infty$. 令 $I_x = (a_x, b_x)$.

1. $I_x \subset G$：$\forall z \in I_x$，不妨设 $x < z$，由 b_x 的定义可知，$\exists w$, $s.t.\ z < w < b_x, (x, w) \subset G$，从而 $z \in G$, 进而 $I_x \subset G$. 所以
$$G = \bigcup_{x \in G} I_x$$
2. $\forall I_y, I_z \in \{I_x | x \in G\}, I_y = I_z$ 或 $I_y \cap I_z = \varphi$：不妨设 $y \in I_y \cap I_z, I_y \cup I_z$ 仍是开区间，根据定义可知，$I_y \cup I_z \subset I_y$. 同理 $I_y \cup I_z \subset I_z$，所以 $I_y = I_z$.
3. $\{I_x | x \in G\}$ 至多可数：考虑每个区间对应一个有理数。
4. 如果 $a_x, b_x \in \mathbb{R}$，则 $a_x, b_x \notin G$：假设 $a_x \in G$，则存在邻域 $(a_x - r, a_x + r) \subset G$，于是 $(a_x - r, x) \subset (a_x - r, a_x + r) \cup (a_x, a_b) \subset G$，这与 a_x 的下界性矛盾。同理可证 $b_x \notin G$.

定义 1.2.1

如果开区间 (a, b) 包含于开集 G，且 $a, b \notin G$，称开区间 (a, b) 是 G 的一个构成区间。 ♣

定义 1.2.2

$\mathbb{R}^n$ 中形如
$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$
的集合称为 $\mathbb{R}^n$ 上的矩体。如果矩体 R 的各边长长度相等，称其为方体。

$p, k \in \mathbb{Z}$，形如 $\frac{k}{2^p}$ 的有理数称为二进有理数，以二进有理点为顶点的方体称为二进方体。 ♣

定理 1.2.2 ($\mathbb{R}^n$ 上的开集结构)

$\mathbb{R}^n$ 上的非空开集，可以表示为至多可数个几乎不相交，或者说内部不相交，即只在边界处相交或不相交的方体之并。 ♡

证明 对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，令
$$\begin{aligned}
\Gamma_k &= \{\text{边长为 } 2^{-k} \text{ 的二进方体}\} \\
F_0 &= \{Q \in \Gamma_0 | Q \subset G\} \\
F_1 &= \{Q \in \Gamma_1 | Q \subset G \backslash F_0\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$
下面证明：
$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{Q \in F_k} Q$$
从而 $\{Q\}$ 至多可数，而且内部不相交。

右式包含于左式是显然的，我们下面证明左式包含于右式：因为 G 是开集，所以
$$\forall x \in G, \exists r > 0\ s.t.\ B_r(x) \subset G$$
无论 k 是多少，都能找到某个边长为 2^{-k} 的二进方体包含 x，即
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists Q^k \in \Gamma_k\ s.t.\ x \in Q^k$$
所以，当 k 充分大时，有 $Q^k \subset B_r(x) \subset G$，由 F_k 的定义，Q^k 一定包含于 $F_0 \cup \cdots \cup F_k$ 中的某个二进制方体当中，于是 $x \in Q^k \subset RHS$，结论得证。

1.3 测度的基本概念

1.3.1 康托尔集

定义 1.3.1

康托尔集：将 $[0,1]$ 挖去中间三分之一，得到

$$F_{11}=\left[0,\frac{1}{3}\right],F_{12}=\left[\frac{2}{3},1\right]$$
$$C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$

重复挖去中间三分之一这个步骤，

$$F_{21}=\left[1,\frac{1}{9}\right],F_{22}=\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],F_{23}=\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],F_{24}=\left[\frac{8}{9},1\right]$$
$$C_2=\left[1,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$

k 次之后，得到

$$C_k=\bigcup_{i=1}^{2^{k+1}}F_{ki},\mathcal{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k$$

$\mathcal{C}$ 被称为康托集。

命题 1.3.1 (康托集相关性质)

1. 设 $\mathcal{C}=[0,1]\backslash G$，$G$ 是一个开集，被称为康托开集；
2. $\mathcal{C}\neq\varnothing$，因为任意 C_k 的端点都在 $\mathcal{C}$ 内；
3. $\mathcal{C}$ 是闭集，而且有界，进而是紧集；
4. $\mathcal{C}$ 是完备集，即不包含任何孤立点，见 Chapter1 Ex1；
5. $\mathcal{C}$ 是完全不连通集，即任取 C 中两个不同的点都不相连，见 Chapter1 Ex1；
6. $\mathcal{C}$ 不含内点；
7. $\mathcal{C}$ 是不可数集，因为可以建立从 $[0,1]$ 到 $\mathcal{C}$ 的一一映射，见 Chapter1 Ex2；
8. G 中开区间的总长度为 1，因为 C_k 的各区间长度之和趋于 0.

后续我们将说明，康托集是一个零测集。这意味着零测集不一定至多可数。

1.3.2 外测度

定义 1.3.2 (体积)

矩体 $R=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ 的体积定义为

$$|R|\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

即所有边长之积。

引理 1.3.1

如果 R 可以表示为若干内部不相交矩体 $R_i,i=1,2,\cdots,n$ 的并，则 $|R|=\sum_{i=1}^{n}|R_i|$.

引理 1.3.2

如果 R 可以表示为若干矩体 $R_i, i=1,2,\cdots,n$ 的并，则 $|R| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |R_i|$.

定义 1.3.3 (外测度)

$E \subset \mathbb{R}^n$，称

$$m_*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : 方体Q_i\ s.t.\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\right\}$$

为 E 的外测度。$m_* : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$，测度可以是正无穷。

从直观上理解，就是找总体积最小的一系列内部不相交的方体把目标集合覆盖住。

例 1.2.

空集、单点集、康托集 C 的外测度为 0.

命题 1.3.2 (外测度相关性质)

1. 方体 Q 的外测度就是其体积。
2. 方体 R 的外测度就是其体积。
3. 单调性：如果 $E_1 \subset E_2 \subset R^n$，则 $m_*(E_1) \leqslant m_*(E_2)$.
4. 次可加性：
$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k)$$
5. 外正则性：
$$m_*(E) = \inf\{m_*(G) : G是开集，E \subset G\}$$
6. 如果 $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$，则 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 这里 $\operatorname{dist}(E_1, E_2) = \inf\{|x-y| : x \in E_1, y \in E_2\}$.
7. 可数个内部不交的方体 Q_i 之并的外测度等于各方体体积之和。
8. 可数个不相交的开集之并的外测度等于各开集外测度之和。
9. 平移不变性：$m_*(E+h) = m_*(E), h \in \mathbb{R}^n$.

1.3.3 可测集与 Lebesgue 测度

定义 1.3.4 (Lebesgue 可测)

$E \subset \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0$, 存在开集 G 使得 $E \subset G$ 且 $m_*(E \backslash G) < \varepsilon$，称 E 是 Lebesgue 可测的，简称可测。

我们把 $\mathbb{R}^n$ 上的所有可测集记作 $\mathcal{L}$.

定理 1.3.1 (Carathéodory 可测)

如果任意 $A \subset \mathbb{R}^n$，满足

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c)$$

称 E 是 Carathéodory 可测的。证明 Carathéodory 可测和 Lebesgue 可测是等价的。

证明 待补充。

命题 1.3.3 (测度相关性质)

1. 开集可测。
2. 零测集可测。
3. 康托集可测。
4. 闭集可测。
5. E 可测，则 E^c 也可测。
6. $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 σ-代数。

定义 1.3.5 (Lebesgue 测度)

定义 Lebesgue 测度 $m \overset{\text{def}}{=} m_*|_{\mathcal{L}}$.

定理 1.3.2 (测度的可数可加性)

设 $E_k \in \mathcal{L}, k = 1, 2, \cdots$ 互不相交，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

定理 1.3.3 (测度的连续性)

设 $E_k \in \mathcal{L}, k = 1, 2, \cdots$

1. (上连续)

$$E_k \nearrow E \Rightarrow m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

2. (下连续)

$$\left.\begin{array}{r} E_k \searrow E \\ m(E_{k_0}) < \infty \text{ for some } k_0 \end{array}\right\} \Rightarrow m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$

证明 $E_k \nearrow E$，不妨设 $F_1 = E_1$，$F_2 = E_2 \backslash E_1$，$\cdots$，$F_n = E_n \backslash E_{n-1}$，以此类推，则 $\{F_k\}$ 互不相交，再由可数可加性得证。下连续同理。

注 条件 $m(E_{k_0}) < \infty$ for some k_0 不可去，反例：

$$E_k \overset{\text{def}}{=} (k, +\infty) \searrow \varnothing \text{ while } m(E_k) = +\infty, \forall k.$$

定理 1.3.4 (可测的其他等价定义)

设 $E \in \mathcal{L}$,

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists G$ open s.t. $E \subset G$ and $m(G \backslash E) < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists F$ close s.t. $F \subset E$ and $m(E \backslash F) < \varepsilon$.
3. 若 $m(E) < \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ 紧，使得 $K \subset E$ and $m(E \backslash K) < \varepsilon$.
4. 若 $m(E) < \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists Q_1, \cdots, Q_N$ 使得 $m\left(E \triangle \left(\bigcup_{k=1}^N Q_k\right)\right) < \varepsilon$.[a]

[a] $E_1 \triangle E_2 \overset{\text{def}}{=} (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1)$，称为对约差。

证明 $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$：见 Chapter1 Ex25.

定理 1.3.5 (可测集是 Borel 集的推广)

$E \subset \mathbb{R}^n$，则 E 可测当且仅当它可以被表示成一个 G_δ 集和零测集的差，当且仅当它可以被表示成一个 F_σ

集和零测集的并。即

$$E \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists G(G_\delta \text{ 集}), \exists N_1(\text{零集}) \text{ s.t. } E = G \backslash N_1$$
$$\Leftrightarrow \exists F(F_\sigma \text{ 集}), \exists N_2(\text{零集}) \text{ s.t. } E = F \cup N_2$$

证明 G_δ 集、F_σ 集和零集都是可测的，我们只需证 $(\Rightarrow)$.

对于一个可测集 E，任意 $n \geqslant 1$，存在包含 E 的开集 G_n 满足 $m_*(G_n - E) \leqslant \frac{1}{n}$. 令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，这是一个 G_δ 集，且 $E \subset G$，同时 $(G - E) \subset (G_n - E)$ 对于 $\forall n$ 都成立，可知

$$m(G - E) \leqslant m(G_n - E) \leqslant \frac{1}{n}, \forall n$$

那么 $G - E$ 是零测的，$E = G - (G - E)$，其中 G 是 G_δ 集，$G - E$ 是零测集。

对于第二种情况，我们只需利用可测的闭集等价定义即可。任意 $n \geqslant 1$，存在闭集 $F_n \subset E$ 满足 $m_*(E - F_n) \leqslant \frac{1}{n}$. 令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，这是一个 F_σ 集，且 $F \subset E$，同时 $(E - F) \subset (E - F_n)$，从而

$$m(E - F) \leqslant m(E - F_n) \leqslant \frac{1}{n}, \forall n$$

所以 $E - F$ 是零测的，$E = (E - F) \cup F$，其中 F 是 F_σ 集，$E - F$ 是零测集。

命题 1.3.4 (可测集的性质)

1. （平移不变性）$\forall E \in \mathcal{L}, h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow E + h \in \mathcal{L}$ 且 $m(E + h) = m(E)$.
2. （旋转不变性）$\forall E \in \mathcal{L}, T \in O(n) \Rightarrow T(E) \overset{\text{def}}{=} \{Tx : x \in E\} \in \mathcal{L}$ 且 $m(T(E)) = m(E)$.
3. （反射不变性）$\forall E \in \mathcal{L} \Rightarrow -E \in \mathcal{L}$ 且 $m(-E) = m(E)$.
4. $\forall E \in \mathcal{L}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda E \in \mathcal{L}$ 且 $m(\lambda E) = \lambda^n m(E)$.

定理 1.3.6 (Vitali,1905)

$\mathbb{R}$ 有不可测子集。

公理 1.1 (选择公理)

设 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族互不相交的非空集合，则存在

$$Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \text{ s.t. } \forall \alpha \in I, Y \cap E_\alpha \text{是独点集}$$

AC$\Leftrightarrow$Zorn's lemma$\Leftrightarrow$ 良序原理

Banach-Tarski paradox(1924)

证明 在 $[0, 1]$ 上引入等价关系：

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$$

令

$$E_\alpha \overset{\text{def}}{=} [\alpha] = \{x \in [0, 1] : x \sim \alpha\}$$

于是有如下三条事实：

1. $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$，$E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$ or $E_\alpha = E_\beta$.
2. $\forall \alpha$，E_α 可数（因为有理数可数）
3. $[0, 1] = \biguplus_\alpha E_\alpha$

由选择公理，可以取出一个代表元系 $V \subset [0, 1]$，即 $\forall \alpha, V \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}$. 下面证明，$V$ 不可测。

设 $\mathbb{Q}\cap[-1,1]=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，$V_k\overset{\text{def}}{=}V+r_k$. 则 V_k 之间互不相交，并且 $[0,1]\subset\biguplus_{k=1}^{\infty}V_k\subset[-1,2]$

$$\begin{aligned}&\forall x\in[0,1],\exists\alpha\text{ s.t. }x\sim x_\alpha\in E_\alpha\cap V\\ \Rightarrow&\exists r_k\text{ s.t. }x-x_\alpha=r_k\\ \Rightarrow&x=x_\alpha+r_k\in V_k\end{aligned}$$

假设 V 可测，由可数可加性，

$$1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(V_k)\leqslant 3$$

由平移不变性，$m(V_k)=m(V)$. 于是得到

$$1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(V)\leqslant 3$$

无论如何上式都无法成立，矛盾。因此 A 不可测。

1.4 可测函数

1.4.1 可测函数的基本概念

实分析中考虑的函数一般允许取 $\pm\infty$，这是为了我们所考虑的可测函数类在极限运算下封闭。

约定记号：

$$\{f<a\}=\{x\in E|-\infty\leqslant f(x)<a\}=f^{-1}([\infty,a))$$
$$\{f>a\}=\{x\in E|a<f(x)\leqslant\infty\}=f^{-1}((a,\infty])$$

定义 1.4.1

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，如果函数 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 满足 $\forall a\in\mathbb{R},\{f<a\}$ 可测，则称 f 在 E 上可测。

命题 1.4.1

以下命题等价：

(1) $\forall a\in\mathbb{R},\{f<a\}$ 可测；
(2) $\forall a\in\mathbb{R},\{f\leqslant a\}$ 可测；
(3) $\forall a\in\mathbb{R},\{f>a\}$ 可测；
(4) $\forall a\in\mathbb{R},\{f\geqslant a\}$ 可测.

证明

$$\{f\leqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f<a+\frac{1}{k}\}$$
$$\{f>a\}=E\backslash\{f\leqslant a\}$$
$$\{f\geqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f>a-\frac{1}{k}\}$$
$$\{f<a\}=E\backslash\{f\geqslant a\}$$

命题 1.4.2

f 可测 $\Leftrightarrow\forall a,b\in\mathbb{R},\{a\leqslant f<b\}$ 可测。

证明 $(\Rightarrow)$：$\{a\leqslant f<b\}=\{f\geqslant a\}\cap\{f<b\}$ 故可测。

(⇐)：$\forall b, \{f < b\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{-k \leqslant f < b\}$，故 f 可测。

命题 1.4.3

以下命题等价：

(1) f 可测；

(2) $\forall$ 开集 $G \subset \mathbb{R}^n$，$f^{-1}(G)$ 可测；

(3) $\forall$ 闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$，$f^{-1}(F)$ 可测；

(4) $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B)$ 可测。

证明 (1) ⇔ (2)：f 可测，故对于任意开区间 I，有 $f^{-1}(I) = \{f \in I\}$ 可测。任意开集 G 可以表示成可列个开区间之并，i.e.

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

所以

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)$$

为可列个可测集之并，故 $f^{-1}(G)$ 可测；反之，$\forall a \in \mathbb{R}$，取一列开集 $G_k = (a-k, a)$，则

$$f^{-1}([-\infty, a)) = f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(G_k)$$

可测，故 f 可测。

(1) ⇔ (3)：f 可测，考虑到 F 的补集 F^c 是开集，$f^{-1}(F)^c = f^{-1}(F^c)$ 可测，自然 $f^{-1}(F)$ 也可测；反之，$\forall a \in \mathbb{R}$，取一列闭集 $F_k = [a-k, a]$，则

$$f^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(F_k)$$

可测，故 f 可测。

(1) ⇔ (4)：f 可测，设 E_k 是一列或是开集或是开集的补（即闭集）的集合，则

$$f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k)$$

可测，考虑到 Borel 集 B 由开集通过补、可数并运算得到，故 $f^{-1}(B)$ 可测；同理可知反过来也成立。

命题 1.4.4

$f: E \to \mathbb{R}$ 可测，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，则 $g \circ f$ 可测。

证明 $(g \circ f)^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}(g^{-1}((-\infty, a)))$，g 连续所以 $g^{-1}((-\infty, a))$ 是开集，f 可测所以 $f^{-1}(g^{-1}((-\infty, a)))$ 可测，由 a 的任意性可知 $g \circ f$ 可测。

注 $f \circ g$ 不一定可测，由此可证明 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$，[1]详见 Chapter1 Ex35.

命题 1.4.5

f 可测，则 f^k 可测，$\forall k \in \mathbb{N}$.

证明

1. k 为奇数，则 $\forall a, \{f^k > a\} = \{f > a^{\frac{1}{k}}\}$；
2. k 为偶数，

$$\{f^k > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, if\ a < 0 \\ \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \cup \{f < -a^{\frac{1}{k}}\}, if\ a \geqslant 0 \end{cases}$$

[1]Borel 集是可测集，可测集不一定是 Borel 集。

命题 1.4.6

f, g 可测，则 $\lambda f, f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ 都可测。[a]

[a]如果有定义的话。

证明

1.

$$\{\lambda f > a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{\lambda}\}, if\ \lambda > 0 \\ \{f < \frac{a}{\lambda}\}, if\ \lambda < 0 \end{cases}$$

2. Claim：

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > a - r\} \cup \{g > r\}$$

$LHS \supset RHS$ 是显然的。

$$\begin{aligned} x \in LHS &\Leftrightarrow f(x) + g(x) > a \\ &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, g(x) > r > a - f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, x \in \{f > a - r\} \cup \{g > r\} \end{aligned}$$

3. $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 + (f-g)^2)$
4.

$$\left\{\frac{1}{g} > a\right\} = \begin{cases} \{g < \frac{1}{a}\}, a > 0 \\ \{g > 0\}, a = 0 \\ \{g > 0\} \cup \{\frac{1}{a} < g < 0\}, a < 0 \end{cases}$$

所以 $\frac{1}{g}$ 可测，进而 $f \cdot \frac{1}{g}$ 也可测。

1.4.2 简单、阶梯函数到可测函数的拟合

定义 1.4.2

设 $E \subset \mathbb{R}^n$，令

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, if\ x \in E \\ 0, if\ x \notin E \end{cases}$$

称为 E 的示性函数或者特征函数。

命题 1.4.7

χ_E 可测 $\Leftrightarrow E$ 可测。

证明

$$\{\chi_E > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n, a < 0 \\ E, 0 \leqslant a < 1 \\ \varnothing, a \geqslant 1 \end{cases}$$

定义 1.4.3

形如

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, E_k, k = 1, 2, \cdots, N \text{可测}$$

的函数被称为简单函数。

注 这里的定义与 Stein 教材定义不同，后者还要求 $m(E_k)<\infty$.

定理 1.4.1

简单函数可测，且有标准表示

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

且 $a_k\in\mathbb{R}$，$a_j\neq a_k$ as $j\neq k$，E_k 可测，$E_j\cap E_k=\varnothing$ as $j\neq k$，$\bigcup E_k=\mathbb{R}^n$.

证明 φ 是简单函数，那么它的值域一定是有限点集，不妨 $\mathrm{Range}(\varphi)=\{a_1,\cdots,a_N\}$，则令 $E_k=\{\varphi=a_k\},k=1,\cdots,N$ 就是所要求的标准表示。

定义 1.4.4

有限个矩体的示性函数的线性组合称为阶梯函数，形如

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}$$

定理 1.4.2

设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测函数，则 $\sup\limits_k f_k,\inf\limits_k f_k,\limsup\limits_{k\to\infty} f_k,\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ 都可测。[a]

[a] 特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在，则可测。即可测函数类对极限运算是封闭的。

证明

$$\begin{aligned}
\{\sup_k f_k>a\}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k>a\}\\
\inf_k f_k&=-\{\sup_k(-f_k)>a\}\\
\limsup_{k\to\infty} f_k&=\inf_k\sup_{j\geqslant k} f_j
\end{aligned}$$

推论 1.4.1

f,g 可测 $\Rightarrow \max\{f,g\},\min\{f,g\}$ 也可测。

定义 1.4.5

$f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，称为 f 的正部；$f^+(x)=\max\{-f(x),0\}$，称为 f 的负部。因此有 $f=f^+-f^-,|f|=f^++f^-$.

推论 1.4.2

f 可测 $\Leftrightarrow f^+,f^-$ 都可测 $\Rightarrow |f|$ 可测。

注 $|f|$ 可测不一定有 f 可测，反例：定义

$$f(x)=\begin{cases}-1,x\in\mathbb{R}\setminus N\\ 1,x\in N\end{cases}$$

其中 N 是不可测集。于是 f 不可测，因为 $\{x\in\mathbb{R}|f(x)>\frac{1}{2}\}=N$ 不可测。但 $|f|=1$，是一个常值函数，所以

$|f|$ 可测。

定义 1.4.6

$E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$P(x)$ 是一个与 x 相关的性质，如果

$$m(\{x \in E | P(x)\text{不成立}\}) = 0$$

则称 P 在 E 上几乎处处成立，记作 P $a.e.$

定理 1.4.3

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测函数，$\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ $a.e.$ $\Rightarrow f$ 可测。

即，可测函数类对于 $a.e.$ 极限也封闭。

证明 记 $A = \{x | \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\}$,

$x \in A$ 时，$\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f$，所以 $\{f < a\} \cap A$ 是可测的。

因为 $\{f < a\} = (\{f < a\} \cap A) \cup A^c$，由题设知后者是零测集，所以 $\{f < a\}$ 可测，进而 f 可测。

定理 1.4.4

设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，则 $\exists$ 一列简单函数 $\varphi_k \geqslant 0, k = 1, 2, \cdots$ $s.t.$ $\varphi_k \nearrow f$. 即

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \text{ and } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

若 f 有界，则 $\varphi_k \rightrightarrows f$.[a]

[a]此处表达意为一致逐点收敛。具体来说，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $k > N$ 时对于所有的 x 都有 $|\varphi_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

证明 对于

$$k = 1, \cdots, j = 1, 2, \cdots, 2^{2k} - 1$$

令

$$E_{k,j} = \left\{\frac{j}{2^k} \leqslant f < \frac{j+1}{2^k}\right\}$$
$$F_k = \{f \geqslant 2^k\}$$
$$\varphi_k = \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k}\chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$

于是

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{j}{2^k}, x \in E_{k,j} \\ 2^k, x \in F_k \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 \leqslant \varphi_k \leqslant f$.

1. $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}, \forall k$,
   (a). 如果 $x \in F_k$
      I. $x \in F_{k+1}, \varphi_{k+1}(x) = 2^{k+1} > 2^k = \varphi_k(x)$.
      II. $x \in F_k \backslash F_{k+1}$,

$$F_k \backslash F_{k+1} = \{2^k \leqslant f < 2^{k+1}\} = \bigcup_{j=2^{2k+1}}^{2^{2k+2}-1} E_{k+1,j}$$

$$\Rightarrow \varphi_{k+1}(x) \geqslant \frac{2^{2k+1}}{2^{k+1}} = 2^k = \varphi(x)$$

这里的 $\frac{2^{2k+1}}{2^{k+1}}$，是 φ_{k+1} 在 $E_{k+1,j}(2^{k+1} \leqslant j < 2^{2k+2} - 1)$ 中的最小可能取值。

(b). 如果 $x \notin F_k$，则对于某个 $j \in \{0, 2, \cdots, 2^{2k}-1\}$，$x \in E_{k,j}$.

$E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1} \Rightarrow \varphi_{k+1}(x) \geqslant \frac{2j}{2^{k+1}} = \frac{j}{2^k} = \varphi_k$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi_k(x) \to f(x), k \to \infty$.

(a). $f(x) = +\infty$，

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \Rightarrow \varphi_k(x) = 2^k, k = 1, 2, \cdots \Rightarrow \varphi_k(x) \to +\infty$$

(b). $f(x) < +\infty$，

$$\begin{aligned} \exists k_0\ s.t.\ f(x) < 2^{k_0} &\Rightarrow \forall k > k_0, \exists j\ s.t.\ x \in E_{k,j} \\ &\Rightarrow 0 \leqslant f(x) - \varphi_k(x) \leqslant \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow \varphi_k(x) \to f(x), k \to \infty \end{aligned}$$

若 f 有界，同上可得 $0 \leqslant f(x) - \varphi_k(x) \leqslant \frac{1}{2^k}, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi_k \rightrightarrows f$.

定义 1.4.7

定义 $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$，称为 f 的支集。如果是紧集，称 f 有紧支集。

注 实际上在这里紧集等价于有界闭集，因此 f 有紧支集 $\Leftrightarrow$ $\{f \neq 0\}$ 有界 $\Leftrightarrow$ 存在充分大的 $B_R(0)$ 使得 $f = 0$ on $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0)$.

推论 1.4.3

$f \geqslant 0$，则 f 可测 $\Rightarrow$ 存在一列有紧支集简单函数 $\varphi_k \geqslant 0\ s.t.\ \varphi_k \nearrow f$.

证明 $f \geqslant 0$ 且可测 $\Rightarrow$ 存在一列简单函数 $\tilde{\varphi}_k \geqslant 0\ s.t.\ \tilde{\varphi}_k \nearrow f$. 令 $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k \cdot \chi_{B_k}(0)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi_k\ \text{simple}, \mathrm{supp}(\varphi_k) \subset \overline{B_k(0)}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \exists k_0\ s.t.\ x \in B_{k_0}(0) \\ &\Rightarrow \forall k \geqslant k_0, x \in B_k(0), \varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x) \end{aligned}$$

定理 1.4.5

f 可测，则存在 $\varphi_k, k = 1, 2, \cdots$ simple 使得

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant |\varphi_1(x)| \leqslant |\varphi_2(x)| \leqslant \cdots \leqslant |f(x)|, \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

证明 $f = f^+ - f^-$，$|f| = f^+ + f^-$，于是存在 $\varphi_k^1 \nearrow f^+$，$\varphi_k^2 \nearrow f^-$，令 $\varphi_k = \varphi_k^1 - \varphi_k^2 \Rightarrow \varphi_k \to f$ pointwise[2] 且 $|\varphi_k| = \varphi_k^1 + \varphi_k^2 \nearrow |f|$.

引理 1.4.1

1.

$$\{f_k \to f\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \{|f_k - f| < \frac{1}{l}\}$$

2. 设 f_k, g_k 分别是一列可测函数，则

$$\left.\begin{array}{r} f_k \to f\ a.e. \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(\{f_k \neq g_k\}) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow g_k \to f\ a.e.$$

证明

1. 待补充；

[2]pointwise：逐点地

2. 首先，$\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\{|g_k - f| \geqslant \varepsilon\} &\subset \{|f_k - g_k| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_k - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\subset \{f_k \neq g_k\} \cup \{|f_k - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}\end{aligned}$$

另一方面，由上一条引理，

$$\begin{aligned}\{g_k \nrightarrow f\} &= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{|g_k - f| \geqslant \frac{1}{l}\right\} \\ &\subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left[\{f_k \neq g_k\} \cup \left\{|f_k - f| \geqslant \frac{1}{l}\right\}\right] \\ &\subset \left(\limsup_{k\to\infty} \{g_k \neq f_k\}\right) \cup \{f_k \nrightarrow f\}\end{aligned}$$

$$f_k \to f \ a.e. \Rightarrow m(\{f_k \nrightarrow f\}) = 0$$

故只需证

$$m\left(\limsup_{k\to\infty} \{g_k \neq f_k\}\right) = 0$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty} m(\{f_k \neq g_k\}) < \infty$

$$\stackrel{\text{Borel}-\text{Cantelli}}{\Rightarrow} m\left(\limsup_{k\to\infty} \{g_k \neq f_k\}\right) = 0$$ [3]

定理 1.4.6

f 可测，则存在一列阶梯函数 ψ_k $s.t.$ $\psi_k \to f$.

证明 我们分三个步骤来证明：

Step1 对于 $f = \chi_E, m(E) < \infty$ 的情形，下面证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在阶梯函数 ψ 使得 $m(\{\psi \neq \chi_E\}) < \varepsilon$.

$$\exists Q_1, \cdots, Q_N \ s.t. \ m\left(E \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

将 $\bigcup Q_k$ 划分为有限个内部不交的矩阵之并，即

$$\bigcup Q_k = \biguplus_{j=1}^{M} R_j'$$

再把每个 R_j' 收缩成 R_j，使得：

$$m\left(E \triangle \left(\bigcup_{j=1}^{M} R_j\right)\right) < \varepsilon$$

且 R_j 两两不相交，则有

$$\chi_E(x) = \sum_{j=1}^{M} X_{R_j}(x), \forall x \in \left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{M}\right)^c$$

这是因为

$$\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{M}\right)^c = \left[E^c \cap \left(\bigcup_{j=1}^{M}\right)^c\right] \cup \left[E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{M}\right)\right]$$

前者 $\chi_E = 0 = \sum \chi_{R_j}$，后者 $\chi_E = 1 = \sum \chi_{R_j}$.

[3] Borel-Cantelli 引理见 Chapter1 Ex16.

于是就有

$$m\left(\left\{\chi_E \neq \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}\right\}\right) < \varepsilon$$

Step2 任取有紧支集的简单函数 φ，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在阶梯函数 ψ 使得 $m(\{\psi \neq \varphi\}) < \varepsilon$.

Setp3 对于一般的可测函数 f，存在一列有紧支集简单函数 φ_k 使得 $\varphi_k \to f$，则对于每个 φ_k 存在相应的阶梯函数 ψ_k 使得 $m(\{\psi \neq \varphi\}) < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$，再由引理 1.3.1(2) 可得 $\psi_k \to f\ a.e.$

至此完成定理的证明。

注 形象化理解上面这个定理：想象一个可测函数的“分辨率”逐渐提升，每个“像素点”(每个阶梯函数的体积) 不断细化，最后得到这个可测函数。

1.4.3 Littlewood 三原则

1. Every measurable set is nearly a finite union of intervals. 每一个可测集事实都近乎[4]是有限个区间的并。
2. **(Lusin theorem)** Every measurable function is nearly continuous. 每一个可测函数都近乎是连续的。
3. **(Egorov theorem)** Every convergent sequence is nearly uniformly convergent. 每一个收敛的序列近乎是一致收敛的。

定理 1.4.7 (Egorov)

$m(E) < +\infty$，f_k 是一列可测且 $a.e.$ 有限[a]的函数，如果 $f_k \to f\ a.e.$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \subset E\ s.t.\ m(E \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ and $f_k \rightrightarrows f$ on A_ε.

[a]指 $m(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0$.

引理 1.4.2

实际上一致连续有如下等价表述：

$$f_k \rightrightarrows f\ on\ A \Leftrightarrow A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_l}^{\infty} \left\{|f_k - f| < \frac{1}{l}\right\}$$

证明 分析：$f_k \rightrightarrows f\ on\ A \Rightarrow A = ?$

根据定义，$f_k \rightrightarrows f\ on\ A$ 相当于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N\ s.t.\ \sup_{x\in A} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall k \geqslant N.$

$$\Leftrightarrow \forall l, \exists k_l\ s.t.\ \sup_{x\in A} |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{l}, \forall k > k_l$$

$$\Rightarrow \exists k_l \nearrow \infty\ s.t.\ A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_l}^{\infty} \left\{|f_k - f| < \frac{1}{l}\right\}$$

由此，问题约化为：$\forall \varepsilon > 0$，是否存在 $k_l \nearrow \infty$，使得

$$A_\varepsilon \overset{def}{=} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=k_l}^{\infty} \left\{|f_k - f| < \frac{1}{l}\right\}$$

[4] “近乎”与“几乎处处”的区别在于，前者使用的是 ε-δ 语言，而后者则建立在零测集的概念下。“几乎处处” $\Rightarrow$ “近乎”。

还需证明 $m(E\backslash A_\varepsilon)<\varepsilon$.

$$\begin{aligned} m(E\backslash A_\varepsilon) &= m\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}\right)\\ &\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}\right)\end{aligned}$$

于是进一步约化为：

$$\forall l,\exists k_l\ s.t.\ m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2^l}$$

不妨设 $f_k\to f$ pointwise（为什么？）

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\{f_k\nrightarrow f\}=\varnothing\\ &\Rightarrow\forall l,\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}=\varnothing\\ &\Rightarrow\bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}\searrow\varnothing\\ &\Rightarrow\exists k_l\ s.t.\ m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2^l}\end{aligned}$$

[5]从而定理得证。

注 定理中的条件 $m(E)<+\infty$ 不可去，反例：$E=(0,\infty),f_k=\chi_{(0,k)},f=\chi_{(0,\infty)}$，则 $f_k\to f$ pointwise，但 $\{|f_k-f|>\frac{1}{2}\}=[k,\infty)$

定理 1.4.8 (Lusin)

设 E 可测，f 在 E 上可测且 $a.e.$ 有限，则 $\forall\varepsilon>0$，存在闭集 $F_\varepsilon\subset E$ 使得 $m(E\backslash F_\varepsilon)<\varepsilon$ 且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续。♡

注 $f|_F$ 连续 $\Leftrightarrow\forall x\in F,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\ |f(y)-f(x)|<\varepsilon,\forall y\in B(x,\delta)\cap F$.

例如 $f=\chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不连续，但 $f|_{\mathbb{Q}}$ 和 $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ 连续。

证明 我们分三个步骤来证明：

Step1 假设 f 是简单函数，

$$f=\sum_{k=1}^{N}c_k\chi_{E_k},\ \biguplus_{k=1}^{N}E_k=E.$$

对于每个 k，存在闭集 $F_k\subset E_k$ 使得 $m(E_k\backslash F_k)<\frac{\varepsilon}{N}$. 令

$$F=\bigcup_{k=1}^{N}F_k\Rightarrow F\subset E,m(E\backslash F)<\varepsilon$$

$\forall x\in F$，存在唯一 $k_x\in\{1,2,\cdots,N\}$，使得 $x\in F_{k_x}$，这是因为 F_i 互不相交。

令 $\delta=\frac{1}{2}\mathrm{dist}(x,F\backslash F_{k_x})$

$$\Rightarrow f\equiv c_{k_x}\ on\ B(x,\delta)\cap F\Rightarrow f|_F \text{在 } x \text{ 连续}$$

Step2 假设 f 可测，且 $a.e.$ 有限，假设 $m(E)<\infty$，不妨设 f 是实值函数，于是存在一列简单函数 φ_k 逐点收敛到 f，再由 Egorov theorem 可得

$$\begin{gathered}\exists A_\varepsilon\subset E,m(E\backslash A_\varepsilon)<\varepsilon/2,s.t.\varphi_k\rightrightarrows f\ on\ A_\varepsilon\\ \overset{\text{Step1}}{\Rightarrow}\forall\varphi_k,\exists F_k\overset{\text{closed}}{\subset}A_\varepsilon\ s.t.\ m(A_\varepsilon\backslash F_k)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\text{ and }\varphi_k|_{F_k}\text{ continuous}\end{gathered}$$

[5]最后一步由测度的连续性得到。

令

$$\begin{aligned}
&F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\\
&\Rightarrow F\overset{\text{closed}}{\subset}A_\varepsilon \text{ and } m(A_\varepsilon\backslash F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(A_\varepsilon\backslash F_k)<\frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow m(E\backslash F)<\varepsilon
\end{aligned}$$

而

$$\left.\begin{array}{r}\varphi_k|_F \text{ continuous}, \forall k\in N_+\\ \varphi_k|_F\rightrightarrows f|_F\end{array}\right\}\Rightarrow f|_F \text{ continuous}$$

Step3 一般情形，令

$$\begin{aligned}
&E_1=E\cap\overline{B_1(0)}, E_k=E^{(}\overline{B_k(0)}\backslash\overline{B_{k-1}(0)}), k\geqslant 2\\
&\Rightarrow E=\biguplus_{k=1}^{\infty}E_k
\end{aligned}$$

对于每个 k，由 Step2，$\exists F_k\overset{\text{closed}}{\subset}E_k\ s.t. m(E_k\backslash F_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}$ 且 $f|_{F_k}$ 连续，令

$$F=\biguplus_{k=1}^{\infty}F_k$$

于是 $f|_F$ 连续，且 $m(E\backslash F)<\varepsilon$.

推论 1.4.4

E 可测，f 在 E 上可测，$\forall\varepsilon>0$，存在一个连续函数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 $m(\{f\neq g\})<\varepsilon$.

定理 1.4.9 (Tietze 延拓定理)

(X,τ) 是正规拓扑空间，闭集 $E\subset X$，则 E 上任一连续函数，可以延拓成 X 上的连续函数。

第 2 章 积分论

我引入比黎曼积分更一般的积分的定义，是为了解决问题而不是因为喜爱复杂性。

——H.Lebesgue, 1903

2.1 Lebesgue 积分

2.1.1 概念介绍

定义 2.1.1 (简单函数的 Lebesgue 积分)

设

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}\geqslant 0,\ \biguplus_{k=1}^{N}E_k=\mathbb{R}^n$$

定义[a]

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{N}a_km(E_k)$$

如果 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，定义

$$\int_E\varphi\mathrm{d}m\overset{\text{def}}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\cdot\chi_E\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{N}a_km(E\cap E_k)$$

[a] 可能是 $+\infty$

笔记 这个定义是良好的，因为如果：

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}=\sum_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j}$$

则

$$\sum_{k=1}^{N}a_km(E_k)=\sum_{j=1}^{M}b_jm(F_j)$$

实际上，

$$E_k=\biguplus_{j=1}^{M}(E_k\cap F_j),F_j=\biguplus_{k=1}^{N}(E_k\cap F_j)$$

$$\Rightarrow m\left(E_k\right)=\sum_{j=1}^{M}m\left(E_k\cap F_j\right),m\left(F_j\right)=\sum_{k=1}^{N}m\left(E_k\cap F_j\right)$$

而且

$$E_k\cap F_j\neq\varnothing\Rightarrow a_k=b_j$$

例 2.1.

Dirichlet 函数 $D=\chi_{\mathbb{Q}}$，则

$$\int_{\mathbb{R}}D\mathrm{dm}=1\cdot m(\mathbb{Q})+0\cdot m(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})=0$$

例 2.2.

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E\mathrm{dm}=m(E)$$

$$\int_E\chi_F\mathrm{dm}=m(E\cap F)$$

命题 2.1.1 (正线性)

$\forall\varphi,\psi\geqslant 0$simple，$\forall\alpha,\beta\geqslant 0$，

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)\mathrm{dm}=\alpha\int\varphi\mathrm{dm}+\beta\int\psi\mathrm{dm}$$

证明 $\int\alpha\varphi\mathrm{dm}=\alpha\int\varphi\mathrm{dm}$ 平凡。下证 $\int(\varphi+\psi)\mathrm{dm}=\int\varphi\mathrm{dm}+\int\psi\mathrm{dm}$.

设 $\phi=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k},\psi=\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j}$

$$\Rightarrow\begin{aligned}E_k&=\biguplus_{j=1}^{M}(E_k\cap F_j)&,k=1,2,\cdots,N\\F_j&=\biguplus_{k=1}^{N}(E_k\cap F_j)&,j=1,2,\cdots,M\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{aligned}\chi_{E_k}&=\textstyle\sum_{j=1}^{M}\chi_{E_k\cap F_j}\\\chi_{F_j}&=\textstyle\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k\cap F_j}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\varphi+\psi=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(a_k+b_j)\chi_{E_k\cap F_j}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int\varphi+\psi&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(a_k+b_j)m(E_k\cap F_j)=\sum_{k=1}^{N}a_k\sum_{j=1}^{M}m(E_k\cap F_j)+\sum_{j=1}^{M}b_j\sum_{k=1}^{N}m(E_k\cap F_j)\\&=\int\varphi\mathrm{dm}+\int\psi\mathrm{dm}\end{aligned}$$

命题 2.1.2 (可加性)

设 $\varphi\geqslant 0$ 是简单函数，E_1，E_2 可测且不相交，于是

$$\int_{E_1\cup E_2}\varphi\mathrm{dm}=\int_{E_1}\varphi\mathrm{dm}+\int_{E_2}\varphi\mathrm{dm}$$

证明

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \int \varphi\chi_{E_1\cup E_2}\mathrm{d}m \\ &= \int \varphi(\chi_{E_1}+\chi_{E_2})\mathrm{d}m \\ &= \int \varphi\chi_{E_1}\mathrm{d}m + \int \varphi\chi_{E_2}\mathrm{d}m \\ &= \text{RHS}\end{aligned}$$

命题 2.1.3 (单调性)

设 $\varphi \geqslant \psi \geqslant 0$ 是简单函数，则

$$\int \varphi\mathrm{d}m \geqslant \int \psi\mathrm{d}m$$

证明 设 $\phi = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}, \psi = \sum\limits_{j=1}^{M} b_j\chi_{F_j}$ 且 $\varphi \leqslant \psi$，则

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a_k \leqslant b_j \text{ if } E_k\cap F_j \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \int \varphi\mathrm{d}m = \sum_{k,j} a_k m(E_k\cap F_j) \\ &\quad \leqslant \sum_{k,j} b_j m(E_k\cap F_j) = \int \psi\mathrm{d}m\end{aligned}$$

定义 2.1.2 (非负可测函数的 Lebesgue 积分)

设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，定义

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathrm{d}m \,\middle|\, \varphi \text{ simple}, 0\leqslant\varphi\leqslant f\right\}$$

称为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分，如果此积分 $<+\infty$，称 f lebesgue 可积[a]，记作 $f\in L^1$.

如果 E 可测，f 在 E 上非负可测，

$$\int_E f\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\chi_E\mathrm{d}m$$

如果此积分 $<+\infty$，称 f 在 E 上可积，记作 $f\in L^1(E)$.

[a] 下简称可积。

命题 2.1.4 (单调性)

设 f，g 非负可测，$f\leqslant g \Rightarrow \int f\mathrm{d}m \leqslant \int g\mathrm{d}m$.

证明 $\forall\varphi$ simple with $0\leqslant\varphi\leqslant f$，

$$\begin{aligned}&f\leqslant g \Rightarrow \varphi\leqslant g \\ &\Rightarrow \int\varphi\mathrm{d}m \leqslant \int g\mathrm{d}m \\ &\Rightarrow \int f\mathrm{d}m \leqslant \int g\mathrm{d}m\end{aligned}$$

命题 2.1.5

f 在 E 上非负可测，

$$\int_E f\mathrm{d}m = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e. on } E$$

证明 ($\Leftarrow$)：这是显然的。

($\Rightarrow$)：$\forall k$，令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \left\{ f > \frac{1}{k} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{k} m(E_k) = \int_{E_k} \frac{1}{k} \mathrm{d}m \int_{E_k} f \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m = 0 \\
&\Rightarrow m(E_k) = 0, \forall k \\
&\overset{\{f>0\}=\bigcup_k E_k}{\Rightarrow} m(\{f>0\}) = 0
\end{aligned}$$

推论 2.1.1

改变 f 在一个零测集上的取值，不会改变积分的值。

命题 2.1.6

设 $f \geqslant 0$，$f \in L^1(E)$，则 f a.e. 有限。

证明 $\forall k$，令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \{f > k\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \{f = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \\
&k \cdot m(E_k) = \int_{E_k} k \mathrm{d}m \leqslant \int_E f \mathrm{d}m < \infty \\
&\Rightarrow m(E_k) \leqslant \frac{1}{k} \int_E f \mathrm{d}m \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0
\end{aligned}$$

而

$$m(E_1) \leqslant \int_E f \mathrm{d}m < \infty$$

且 $E_k \searrow \{f = +\infty\}$

$$\overset{\text{测度的连续性}}{\Rightarrow} m(\{f = +\infty\}) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$$

2.1.2 可测函数列积分的收敛性

定理 2.1.1 (Levi，单调收敛定理，MCT)

f_k 是一列 E 上的非负可测函数，

$$f_k \nearrow f \text{ a.e. on } E \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m = \int_E f \mathrm{d}m$$

证明 因为可以修改 f_k 在零测集上的取值，不妨设 $f_k \nearrow f$ pointwise

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{积分的单调性}}{\Rightarrow} \int_E f_k \mathrm{d}m \nearrow \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m \text{存在（可能为 } +\infty\text{）}
\end{aligned}$$

如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m=+\infty$，

$$\begin{aligned} f_k\leqslant f\Rightarrow &\int_E f\mathrm{d}m\geqslant\int_E f_k\mathrm{d}m\to+\infty\\ \Rightarrow &\int_E f\mathrm{d}m=+\infty\end{aligned}$$

如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k \mathrm{d}m<+\infty$，同理可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m\leqslant\int_E f\mathrm{d}m$$

Claim $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m\geqslant\int_E f\mathrm{d}m$：

$\forall\varphi$ simple,$0\leqslant\varphi\leqslant f$

$\forall\alpha,0<\alpha<1$，令

$$E_k\overset{\text{def}}{=}\{f_k\geqslant\alpha\varphi\},k=1,2,\cdots$$

则 $E_k\nearrow\mathbb{R}^n$，令 $\varphi\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^N a_j\chi_{F_j}$

$$\overset{\text{测度的连续性}}{\Rightarrow}\sum_{j=1}^N a_j m(E_k\cap F_j)\to\sum_{j=1}^N a_j m(F_j)$$

即 $\int_{E_k}\varphi\mathrm{d}m\to\int\varphi\mathrm{d}m$ as $k\to\infty$，而

$$\begin{aligned} &\int f_k\mathrm{d}m\geqslant\int_{E_k} f_k\mathrm{d}m\geqslant\int_{E_k}\alpha\varphi\mathrm{d}m=\alpha\int_{E_k}\varphi\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}m\geqslant\alpha\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi\mathrm{d}m=\alpha\int\varphi\mathrm{d}m\\ \overset{\alpha\to1^-}{\Rightarrow}&\lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}m\geqslant\int\varphi\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}m\geqslant\int f\mathrm{d}m\end{aligned}$$

定理 2.1.2 (Fatou 引理)

f_k 是一列 E 上的非负可测函数，则

$$\int_E\liminf_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}m\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m$$

证明 $\forall k$,

$$\begin{aligned} &\inf_{j\geqslant k} f_j\leqslant f_i,\forall i\geqslant k\\ \Rightarrow&\forall i\geqslant k,\int_E\inf_{j\geqslant k} f_j\mathrm{d}m\leqslant\int_E f_i\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\int_E\inf_{j\geqslant k} f_j\mathrm{d}m\leqslant\inf_{i\geqslant k}\int_E f_i\mathrm{d}m \qquad (*)\\ \Rightarrow&\int_E\liminf_{k\to\infty} f_k\mathrm{d}m=\int_E\lim_{k\to\infty}\inf_{j\geqslant k} f_j\mathrm{d}m\\ &\overset{\text{MCT}}{=}\lim_{k\to\infty}\int_E\inf_{j\geqslant k} f_j\mathrm{d}m\\ &\overset{by(*)}{\leqslant}\lim_{k\to\infty}\inf_{i\geqslant k}\int_E f_i\mathrm{d}m=\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}m\end{aligned}$$

例 2.3. MCT 中的单调条件不可去

举例说明，存在一列 E 上的非负可测函数 f_k，使得

1. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在；
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m$ 存在；
3. $\int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}m < \lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \mathrm{d}m$.

取 $E=[0,1]$ 上的函数列 $f_k = k\cdot\chi_{[1-\frac{1}{k},1]}$ 和 $f=0$ 即可。

推论 2.1.2 (Fatou⇒ MCT)

$$\begin{aligned}
f_k \nearrow f \Rightarrow \int f_k \mathrm{d}m &\leqslant \int f \mathrm{d}m, \forall k \\
\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}m &\leqslant \int f \mathrm{d}m \\
\text{Fatou} \Rightarrow \int f \mathrm{d}m &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}m \\
\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d} &= \int f \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

命题 2.1.7 (正线性)

设 f，g 非负可测，α，$\beta \geqslant 0$，则

$$\int (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}m = \alpha \int f \mathrm{d}m + \beta \int g \mathrm{d}m$$

证明 $\int \alpha f \mathrm{d}m = \alpha \int f \mathrm{d}m$，平凡。只需证明：

$$\int (f+g)\mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m + \int g \mathrm{d}m$$

$$\exists \varphi_k \geqslant 0 \text{ simple s.t. } \varphi_k \nearrow f$$

$$\exists \psi_k \geqslant 0 \text{ simple s.t. } \psi_k \nearrow g$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int (f+g)\mathrm{d}m &= \lim_{k\to\infty} \int (\varphi_k + \psi_k)\mathrm{d}m \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int \varphi_k \mathrm{d}m + \int \psi_k \mathrm{d}m \right) \\
&= \int f \mathrm{d}m + \int g \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

定理 2.1.3 (逐项积分)

f_k 是一列 E 上的非负可测函数，

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ a.e. 有限} \Rightarrow \int f \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}m$$

证明

$$\forall N, \int (\sum_{k=1}^{N} f_k)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{N} \int f_k \mathrm{d}m$$

$$\sum_{k=1}^{N} f_k \nearrow f \overset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int f \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}m$$

定义 2.1.3 (可测函数的 Lebesgue 积分)

设 E 可测，f 在 E 上可测，如果 $\int_E f^+\mathrm{d}m$ 和 $\int_E f^-\mathrm{d}m$ 中至少有一个有限，则定义：

$$\int_E f\mathrm{d}m = \int_E f^+\mathrm{d} - \int_E f^-\mathrm{d}m$$

如果两项均有限，则称 f 在 E 上可积。我们把 E 上的可积函数全体记作 $L^1(E)$，同时 L^1 就相当于 $L^1(\mathbb{R})^n$. ♣

命题 2.1.8

$f \in L^1(E) \Leftrightarrow |f| \in L^1(E)$. ♠

证明 ($\Rightarrow$)：平凡。

($\Leftarrow$)：因为 $\max\{f^+, f^-\} \leqslant |f|$，所以

$$\max\left\{\int_E f^+\mathrm{d}m, \int_E f^-\mathrm{d}m\right\} \leqslant \int_E |f|\mathrm{d}m$$

命题 2.1.9

$f \in L^1(E) \Rightarrow f$ a.e. 有限 on E. ♠

定理 2.1.4

$L^1(E)$ 是向量空间，即任意可积函数的线性组合仍可积。♡

证明

$$\begin{aligned}\int |\alpha f + \beta g|\mathrm{d}m &\leqslant \int (|\alpha||f| + |\beta||g|)\mathrm{d}m \\ &= |\alpha|\int |f|\mathrm{d}m + |\beta|\int |g|\mathrm{d}m < +\infty\end{aligned}$$

命题 2.1.10 (线性)

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}m = \alpha\int_E f\mathrm{d}m + \beta\int_E g\mathrm{d}m$$ ♠

证明 拆成正负部相减的形式，再由正线性即可得证。

命题 2.1.11 (可数可加性)

$f \in L^1$，$\{E_k\}$ 可测且几乎不相交，则

$$\int_{\biguplus_{k=1}^\infty E_k} f\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f\mathrm{d}m$$ ♠

证明 令 $E \overset{\text{def}}{=} \biguplus_{k=1}^\infty E_k$，

$$\begin{aligned}&\forall N, \chi_{\biguplus_{k=1}^\infty E_k} = \sum_{k=1}^N \chi_{E_k} \\ \Rightarrow &\int_{\bigcup_{k=1}^N E_k} f^+\mathrm{d}m = \int f^+ \cdot \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}\mathrm{d}m \\ &= \sum_{k=1}^N \int f^+ \cdot \chi_{E_k}\mathrm{d}m\end{aligned}$$

注意到 $f^+\cdot\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}\nearrow f^+\chi_E$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\int_E f^+\mathrm{d}m&=\int f^+\chi_E\mathrm{d}m\\&\overset{\text{MCT}}{=}\lim_{N\to\infty}\int f^+\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}\mathrm{d}m\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N\int_{E_k}f^+\mathrm{d}m\\&=\sum_{k=1}^\infty\int_{E_k}f^+\mathrm{d}m\end{aligned}$$

正部如此，负部也同理，于是定理得证。

命题 2.1.12 (单调性)

$$f\leqslant g\Rightarrow\int f\mathrm{d}m\leqslant\int g\mathrm{d}m$$

证明 $g-f$ 非负，积分也非负，再由线性得到结论。

命题 2.1.13 (三角不等式)

$$\left|\int f\mathrm{d}m\right|\leqslant\int|f|\mathrm{d}m$$

证明

$$f\leqslant|f|\Rightarrow\int f\mathrm{d}m\leqslant\int|f|\mathrm{d}m$$

$$-f\leqslant|f|\Rightarrow-\int f\mathrm{d}m\leqslant\int|f|\mathrm{d}m$$

定理 2.1.5

$f\in L^1$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $B\subset\mathbb{R}^n$，$m(B)<\infty$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B}|f|\mathrm{d}m<\varepsilon$$

证明 令

$$f_k\overset{\text{def}}{=}|f|\cdot\chi_{B_k(0)},k=1,2,\cdots$$

于是 $f_k\nearrow|f|$，

$$\begin{aligned}&\overset{\text{MCT}}{\Rightarrow}\lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}=\int|f|\mathrm{d}m\\&\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\text{ s.t. when }k\geqslant N,0\leqslant\int|f|\mathrm{d}m-\int f_k\mathrm{d}m<\varepsilon\\&\text{i.e.}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_k(0)}|f|\mathrm{d}m<\varepsilon\end{aligned}$$

定理 2.1.6 (积分的绝对连续性)

$$f\in L^1,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ s.t.\ \forall E,m(E)<\delta\Rightarrow\int_E|f|\mathrm{d}m<\varepsilon.$$

证明 $\forall k$，令

$$E_k=\{|f|\leqslant k\},g_k=|f|\cdot\chi_{E_k}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow g_k \nearrow |f| \\
&\overset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty}\int g_k \mathrm{d}m = \int |f|\mathrm{d}m \\
&\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\ s.t.\ 0 \leqslant \int |f|\mathrm{d}m - \int g_N \mathrm{d}m \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{\delta=\varepsilon\backslash 2N}{\Rightarrow} \forall E \text{ with } m(E)<\delta,
\end{aligned}
$$

$$
\int_E |f|\mathrm{d}m = \int_E (|f|-g_N)\mathrm{d}m + \int_E g_N \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2} + N\cdot m(E) < \varepsilon
$$

定理 2.1.7 (Lebesgue 控制收敛定理，DCT)

设 $f_k \to f$ a.e. 且 $\exists g \in L^1$ s.t. $|f_k| \leqslant g$ a.e. 则

$$
\lim_{k\to\infty}\int f_k \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m
$$

证明

$$
\left.\begin{aligned} f_k &\to f \text{ a.e.} \\ |f_k| &\leqslant g \text{ a.e.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f| \leqslant g \text{ a.e.}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \int |f|\mathrm{d}m \leqslant \int g\mathrm{d}m < +\infty \\
&\Rightarrow f \in L^1
\end{aligned}
$$

$$
g_k \overset{\text{def}}{=} |f_k - f| \Rightarrow 0 \leqslant g_k \leqslant 2g \text{ a.e.}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \int \liminf_{k\to\infty}(2g-g_k)\mathrm{d}m \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int (2g-g_k)\mathrm{d}m \\
&\Rightarrow 2\int g\mathrm{d}m - \int \lim_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}m \leqslant 2\int g\mathrm{d}m - \limsup_{k\to\infty}\int g_k \mathrm{d}m \\
&\Rightarrow \limsup_{k\to\infty}\int g_k\mathrm{d}m \leqslant \int \lim_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}m = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int |f_k - f|\mathrm{d}m = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}m = \int f\mathrm{d}m
\end{aligned}
$$

定理 2.1.8 (有界收敛定理)

设 $f_k, k=1,2\cdots$ 可测，且

1. $\exists$ const M s.t. $|f_k| \leqslant M$ a.e.
2. $\exists E$，$m(E)<\infty$ s.t. $\mathrm{supp}(f_k) \subset E$
3. $f_k \to f$ a.e.

则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k\mathrm{d}m = \int f\mathrm{d}m$

证明 令 $g = M\chi_E$.

例 2.4.

求

$$
\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k t^{\frac{1}{k}}}
$$

解

1. $t\in(0,1]$，$k\geqslant 2$，则
$$\frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^{k}t^{\frac{1}{k}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}\in L^1(0,1]$$
2. $t\in[1,+\infty)$，$k\geqslant 2$，则
$$\frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^{k}t^{\frac{1}{k}}}\leqslant\frac{4}{t^2}\in L^1[1,+\infty)$$

于是令
$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{t}},t\in(0,1]\\ \frac{4}{t^2},t\in(1,\infty)\end{cases}$$

2.1.3 其他相关内容

定理 2.1.9 (积分号下求导)

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，函数 $f:E\times(a,b)\to\mathbb{R}$ 使得
1. $\forall y\in(a,b),x\mapsto f(x,y)$ 在 E 上可积，
2. $\forall x\in E,y\mapsto f(x,y)$ 在 (a,b) 上可微，
3. $\exists g\in L^1(E)$ s.t.
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant g(x),\forall(x,y)\in E\times(a,b)$$

则
$$\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x$$

证明 对 $(x,y),\forall t_k\to 0$ with $y+t_k\in(a,b)$，令
$$f_k(x)=\frac{f(x,y+t_k)-f(x,y)}{t_k}\to\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
于是
$$|f_k(x)|\overset{\text{中值定理}}{\leqslant}\sup_{y\in(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\overset{3}{\leqslant}g(x)$$
$$\begin{aligned}\overset{\text{DCT}}{\Rightarrow}\int_E\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{\int_E f(x,y+t_k)\mathrm{d}x-\int_E f(x,y)\mathrm{d}x}{t_k}\\&=\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

定义 2.1.4 (复值函数的积分)

对函数 $f:E\to\mathbb{C}$，如果 $\mathrm{Re}f$，$\mathrm{Im}f$ 都可测，则称 f 可测。如果 $\int_E|f|\mathrm{d}m<\infty$，则称 f 可积，并令
$$\int_E f\mathrm{d}m=\int_E\mathrm{Re}f\mathrm{d}m+\mathrm{i}\int_E\mathrm{Im}f\mathrm{d}m$$

定理 2.1.10 (Lebesgue 积分与 Riemann 积分)

对于 $[a,b]$ 上的实值函数 f，如果 Riemann 可积，则 Lebesgue 可积，且

$$\int_{[a,b]} f \mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

♡

证明 对 $[a,b]$ 进行划分

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

令

$$S(f,P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(Darboux、上和)}$$

$$s(f,P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(下和)}$$

$$M_i \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), m_i \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$\overline{\int_a^b} f \overset{\text{def}}{=} \inf_P s(f,P) \qquad \text{(上积分)}$$

$$\underline{\int_a^b} f \overset{\text{def}}{=} \inf_P s(f,P) \qquad \text{(下积分)}$$

f Riemann 可积当且仅当上下积分相等。

存在单调划分序列 $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $S(f,P_k) \searrow \overline{\int_a^b} f, s(f,P_k) \nearrow \underline{\int_a^b} f.$

设 $P_k : a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n_k}^{(k)} = b$，令

$$\varphi_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_k} M_i \chi_{(x_{i-1},x_i]}$$

$$\psi_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_k} m_i \chi_{(x_{i-1},x_i]}$$

则 $\varphi_k \searrow, \psi_k \nearrow$，且 $\psi_k \leqslant f \leqslant \varphi_k$ w.r.t. k [1]，令 $g \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k, h \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$，于是 $g \leqslant f \leqslant h$

设 $|f| \leqslant M$ [2]

$$\Rightarrow |\varphi_k| \leqslant M, |\psi_k| \leqslant M$$

$$\overset{\text{DCT}}{\Rightarrow} \int_{[a,b]} |g|\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} |\psi_k|\mathrm{d}m \leqslant M(b-a)$$

$$\Rightarrow g \in L^1[a,b]$$

且

$$\int_{[a,b]} g\mathrm{d}m \overset{\text{DCT}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_k \mathrm{d}m$$

$$= \lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{\int_a^b} f$$

同理

$$\int_{[a,b]} h\mathrm{d}m = \overline{\int_a^b} f$$

---

[1] w.r.t.：with respect to 的缩写。是关于、谈及、谈到的意思。

[2] 这是因为 Riemann 可积则有界。

因为 f Riemann 可积当且仅当上下积分相等，故

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(h-g)\mathrm{d}m&=0\\ &\overset{h-g\geqslant 0}{\Rightarrow} g=h \text{ a.e.}\\ &\Rightarrow f=g \text{ a.e.}\\ &\overset{g\in L^1[a,b]}{\Rightarrow} f\in L^1[a,b]\end{aligned}$$

且

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m=\int_{[a,b]} g\mathrm{d}m=\int_a^b f$$

笔记 Lebesgue 积分没有覆盖条件收敛[3]，则为广义积分，例如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\notin L^1(\mathbb{R})$$

但作为广义积分，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\pi$.

2.2 L^p 空间（F.Riesg,1910）

2.2.1 完备性

定义 2.2.1 (本性有界)

设 $0<p<\infty$，$E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，f 在 E 上可测，定义

$$||f||_p\overset{\text{def}}{=}\left(\int_E |f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(E)\overset{\text{def}}{=}\{f:||f||_p<\infty\}$$

如果存在 $M>0$ 使得 $|f|\leqslant M$ a.e. on E，则称 f 在 E 上本性有界，M 作为 $|f|$ 的一个本性上界，

$$\begin{aligned}||f||_\infty &\overset{\text{def}}{=}\operatorname*{esssup}_{x\in E}|f(x)| \qquad \text{(本性上确界)}\\ &\overset{\text{def}}{=}\inf\{M>0:|f|\leqslant M \text{ a.e. on } E\}\\ L^\infty(E)&\overset{\text{def}}{=}\{f:||f||_\infty<\infty\}\\ &=E\text{上本性有界函数全体}\end{aligned}$$

定理 2.2.1

$L^p(E)$ 是一个向量空间。

证明 $p=\infty$ 的情况是显然的。

$0<p<\infty$，设 $f,g\in L^p(E)$，于是

$$\begin{aligned}|f+g|^p&\leqslant(2\max\{|f|,|g|\})^p\\ &\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)\\ \Rightarrow \int_E|f+g|^p\mathrm{d}m&\leqslant 2^p\left[\int_E|f|^p\mathrm{d}m+\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right]\end{aligned}$$

[3]这里存疑，不知道所谓“覆盖条件收敛”是什么意思。

定义 2.2.2 (范数、赋范空间)

X 是 $\mathbb{R}^n$ 上的向量空间，如果 X 上的函数 $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ 满足：

1. 正定性：$||x|| \geqslant 0$，$\forall x \in X$，等号成立当且仅当 $x = 0$.
2. 齐次性：$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$，$\forall x \in X$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. 三角不等式：$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$，$\forall x, y \in X$.

称 $||\cdot||$ 是 X 上的一个范数，$(X, ||\cdot||)$ 称为赋范空间。

范数诱导了一个度量 $d(x,y) \overset{\text{def}}{=} ||x-y||$.

称 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 收敛是指存在 $x \in X$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$.

称 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ 是 Cauthy 列是指 $d(x_i, x_j) \to 0$ as $k, j \to \infty$.

如果 X 中的每个 Cauthy 列都收敛，则称 X 是完备的。完备的赋范空间称为 Banach 空间。

例 2.5.

$0 < p < 1$ 时，$||\cdot||_p$ 不是 $L^p(E)$ 上的范数。

证明 取 $E_1, E_2 \subset E$ 可测，$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 且 $0 < m(E_1), m(E_2) < \infty$. 则

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||\chi_{E_1} + \chi_{E_2}||_p &= (m(E_1) + m(E_2))^{\frac{1}{p}} \\ &> m(E_1)^{\frac{1}{p}} + m(E_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||\chi_{E_1}||_p + ||\chi_{E_2}||_p\end{aligned}$$

定理 2.2.2 (Minkowski 不等式)

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \forall f, g \in L^p(E)$，则

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

什么时候等号成立？

引理 2.2.1

$\forall a, b \geqslant 0, \forall \lambda \in (0,1), a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1-\lambda) b.$

证明 不妨 $b \neq 0$，即证

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leqslant \lambda\left(\frac{a}{b}\right) + 1 - \lambda$$

问题约化为

$$t^{\lambda} \leqslant \lambda t + 1 - \lambda, t \in (0, \infty)$$

定理 2.2.3 (Hölder 不等式)

设 $1 < p < \infty$，令 $p' = \frac{p}{p-1}$，称为 p 的共轭指标，则

$$\forall f \in L^p(E), \forall g \in L^{p'}(E), ||fg||_1 \leqslant ||f||_p ||g||_{p'}$$

（什么时候等号成立？此为第六次作业习题 5.）

证明 [proof of Hölder] 几个平凡的情形：$||f||_p = 0$ 或 $||g||_{p'} = 0$ 或 $||f||_p = \infty$ 或 $||g||_{p'} = \infty$.

不妨设 $0 < ||f||_p, ||g||_{p'} < \infty$.

Step1：先假设 $||f||_p=||g||_{p'}=1$，令 $a=|f|^p,b=|g|^{p'},\lambda=\frac{1}{p}\Rightarrow 1-\lambda=\frac{1}{p'}$，由引理可知

$$\begin{aligned}|fg|&=a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{p'}}=a^{\lambda}b^{1-\lambda}\\&\leqslant\lambda a+(1-\lambda)b\\&=\frac{1}{p}|f|^p+\frac{1}{p'}|g|^{p'}\\\Rightarrow ||fg||_1&\leqslant\frac{1}{p}||f||_p^p+\frac{1}{p'}||g||_{p'}^{p'}\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1=||f||_p||g||_{p'}\end{aligned}$$

Step2：一般情形，则令

$$\tilde{f}=\frac{f}{||f||_p},\tilde{g}=\frac{g}{||g||_{p'}}$$

即可。

证明 [proof of Minkowski] 平凡情形：$p=1$ 或 $p=\infty$.

不妨设 $1<p<\infty$.

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p=&\int_E|f+g||f+h|^{p-1}\mathrm{d}m\\\leqslant&\int_E|f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}m+\int_E|g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}m\\\overset{H\ddot{o}lder}{\leqslant}&\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|f+g|^{(p-1)p'}\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p'}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|f+g|^{(p-1)p'}\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p'}}\\=&(||f||_p+||g||_p)||f+g||_p^{p-1}\\\Rightarrow&||f+g||\leqslant||f||_p+||g||_p\end{aligned}$$

笔记 思考：$||\cdot||_p$ 是不是 $L^p(E)$ 上的范数？当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，满足三角不等式和齐次性，但是 $||f||_p=0\not\Rightarrow f=0$，而是 $f=0$ a.e. 如果在 $L^p(E)$ 中引入等价关系：

$$f\sim g\Leftrightarrow f=g\text{ a.e.}$$

把 $L^p(E)/_\sim$ 与 $L^p(E)$ 等同，则就是一个赋范空间。

定理 2.2.4 (Riesg-Fischer)

设 $1\leqslant p<\infty$，则 $L^p(E)$ 完备。

证明 任取 $\{f_k\}_{k=1^\infty}\subset L^p(E)$ 是 Cauthy 列，

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{ s.t. }||f_k-f_j||_p\leqslant\varepsilon,\forall k,j\geqslant N\\\Rightarrow&\exists k_1\text{ s.t. }||f_k-f_{k_1}||_p<\frac{1}{2},\forall k\geqslant k_1\\\Rightarrow&\exists k_2>k_1\text{ s.t. }||f_k-f_{k_2}||_p<\frac{1}{2^2},\forall k\geqslant k_2\\&\vdots\\\Rightarrow&\exists k_j>k_{j-1}\text{ s.t. }||f_k-f_{k_j}||_p<\frac{1}{2^j},\forall k\geqslant k_j\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 满足：

$$||f_{k_{j+1}}-f_{k_j}||<\frac{1}{2^j},j=1,2\cdots$$

令

$$M \stackrel{\text{def}}{=} ||f_{k_1}||_p + \sum_{j=1}^{\infty} ||f_{k_{j+1}} - f_{k_j}||_p$$

$$g_N \stackrel{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

$$g \stackrel{\text{def}}{=} |f_{k_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$$

$$\stackrel{\text{Minkowski}}{\Rightarrow} ||g_N||_p \leqslant ||f_{k_1}||_p + \sum_{j=1}^{N} ||f_{k_{j+1}} - f_{k_j}||_p \leqslant M$$

又因为 $g_N^p \nearrow g^p$

$$\stackrel{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int_E g^p \mathrm{d}m = \lim_{N\to\infty} \int_E g_N^p \mathrm{d}m \leqslant M^p$$

$$\Rightarrow g \in L^1(E)$$

$$\Rightarrow g \text{ a.e.有限}$$

注意到

$$f_{k_N} = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{N-1} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$$

$$\stackrel{g_N \to g \text{ a.e.}}{\Rightarrow} \exists f \text{ s.t. } f_{k_N} \to f \text{ a.e.}$$

$$\because \left| \sum_{j=l}^{M} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) \right| \leqslant \sum_{j=l}^{m} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}| \to 0, \text{ as } l, m \to 0$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \int_E |f|^p \mathrm{d}m \leqslant \liminf_{N\to\infty} \int_E |f_{k_N}|^p \mathrm{d}m \leqslant M$$

$$\Rightarrow f \in L^p(E)$$

$$\forall l, ||f - f_{k_l}||_p^p = \int_E |f - f_{k_l}|^p \mathrm{d}m \stackrel{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{j\to\infty} \int_E |f_{k_j} - f_{k_l}|^p \mathrm{d}m$$

$$\Rightarrow \lim_{l\to\infty} ||f - f_{k_l}||_p \leqslant \lim_{l\to\infty} \liminf_{j\to\infty} ||f_{k_j} - f_{k_l}||_p = 0$$

最后

$$||f_k - f||_p \leqslant ||f_k - f_{k_l}||_p + ||f_{k_l} - f||_p \to 0 \text{ as } k, l \to \infty$$

定理 2.2.5

L^∞ 完备。

证明 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^\infty(E)$ 是 Cauthy 列，也就是

$$||f_k - f_j||_\infty \to 0 \text{ as } k, j \to \infty$$

令

$$A_k \stackrel{\text{def}}{=} \{|f_k| > ||f_k||_\infty\}$$

$$B_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{|f_k - f_j| > ||f_k - f_j||_\infty\}$$

$$k, j = 1, 2, \cdots$$

$$\Rightarrow m(A_k) = 0, m(B_{k,j}) = 0$$

令

$$F \overset{\text{def}}{=} \left(\bigcup_k A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k,j} B_{k,j}\right)$$

因此 $m(F)=0$，且

$$|f_k(x)-f_j(x)| \leqslant ||f_k-f_j||_\infty, \forall x \in E\backslash F \tag{*}$$

于是 $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauthy 列，故收敛。令

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) & ,x\in E\backslash F \\ 0 & ,x \in F \end{cases}$$

于是 f 可测，且

$$\begin{aligned}
&\exists N, \text{ s.t.} \sup_{x\in E\backslash F}|f_k(x)-f_j(x)| \leqslant ||f_k-f_j||_\infty \leqslant 1, \forall k,j \geqslant N. \\
\overset{j\to\infty}{\Rightarrow} &\sup_{x\in E\backslash F}|f_N(x)-f(x)| \leqslant 1 \\
\Rightarrow &\sup_{x\in E\backslash F}|f(x)| \leqslant 1+\sup_{x\in E\backslash F}|f_N(x)| < \infty \\
\Rightarrow & f \in L^\infty(E) \\
&\forall \varepsilon>0, \exists N, \text{ s.t.} ||f_k-f_j||_\infty < \varepsilon, \forall k,j \geqslant N \\
\Rightarrow &\forall x \in E\backslash F, |f_k(x)-f(x)| = \lim_{j\to\infty}|f_k(x)-f_j(x)| \overset{(*)}{\leqslant} \lim_{j\to\infty}||f_k-f_j||_\infty \leqslant \varepsilon, \forall k \geqslant N \\
\Rightarrow & ||f_k-f||_\infty = \inf_{\substack{Z\subset E\\ m(Z)=0}} \sup_{x\in E\backslash Z}|f_k(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon, \forall k \geqslant N
\end{aligned}$$

2.2.2 收敛性

定义 2.2.3 (依范数收敛)

设 $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^p(E)$，$1 \leqslant p < \infty$. 如果存在 $f \in L^p(E)$ 使得

$$||f_k - f||_p \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

则称 f_k 依 L^p 范数收敛于 f，记作 $f_k \overset{L^p}{\to} f$ 或者 $f_k \overset{||.||_p}{\to} f$ ♣

定义 2.2.4 (依测度收敛)

$$f_k \overset{m}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0, m(\{|f_k-f| \geqslant \varepsilon\}) \to 0 \text{ as } k\to\infty$$

♣

推论 2.2.1

$f_k \overset{L^p}{\to} f \Rightarrow f_k \overset{m}{\to} f$ ♡

证明 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned}
\int |f_k-f|^p \mathrm{d}m &\geqslant \int_{\{|f_k-f|\geqslant\varepsilon\}} |f_k-f|^p\mathrm{d}m \\
&\geqslant \varepsilon^p m(\{|f_k-f|^p \geqslant \varepsilon\}) \\
\Rightarrow m(\{|f_k-f|\geqslant\varepsilon\}) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int |f_k-f|^p\mathrm{d}m \to 0 \text{ as } k\to\infty
\end{aligned}$$

笔记

1. $f_k \xrightarrow{m} f \nRightarrow f_k \to f$ a.e.，例子见 Chapter2 Ex12.
2. $f_k \to f$ a.e. $\nRightarrow f_k \xrightarrow{m} f$

例 2.6.

2° 的反例：$f_k \overset{\text{def}}{=} \chi_{(-k,k)}$，$f \overset{\text{def}}{=} 1$，于是 $f_k \to f$ pointwise. 但 $m\left(\{|f_k - f| \geqslant \frac{1}{2}\}\right) = \infty$.

定理 2.2.6 (Lebesgue)

设 $m(E) < \infty, f, f_k, k = 1, 2, \cdots$ 在 E 上可测，且 a.e. 有限，则

$$f_k \to f \text{a.e.} \Rightarrow f_k \xrightarrow{m} f$$

证明 对于 $k \in \mathbb{N}$，$\varepsilon > 0$，令

$$E_k(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{|f_k - f| \geqslant \varepsilon\}$$

$$\forall x \in \limsup_{k\to\infty} E_k(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)$$

即：$\forall j, \exists k_j$ s.t. $x \in E_{k_j}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{有子列} \{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ s.t. } |f_{k_j}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon, j = 1, 2, \cdots \\
&\Rightarrow f_k(x) \nrightarrow f(x) \\
&\Rightarrow \limsup_{k\to\infty} E_k(\varepsilon) \subset \{f_k \nrightarrow f\} \\
&\overset{f_k \to f \text{ a.e.}}{\Rightarrow} m(\limsup_{k\to\infty} E_k(\varepsilon)) = 0
\end{aligned}$$

而

$$\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon) \searrow \limsup_{k\to\infty} E_k(\varepsilon)$$

$$\underset{m(E)<\infty}{\overset{\text{测度的连续性}}{\Rightarrow}} \lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = m(\limsup_{k\to\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$$

$$\overset{\text{特别地}}{\Rightarrow} \lim_{j\to\infty} m(E_j(\varepsilon)) = 0$$

定理 2.2.7 (Riesg)

$f_k \xrightarrow{m} f \Rightarrow$ 有子列 $f_{k_j} \to f$a.e.

证明

$$\begin{aligned}
f_k \xrightarrow{m} f &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N \text{ s.t. } m(\{|f_k - f| \geqslant \varepsilon\}) < \eta, \forall k \geqslant N \\
&\Rightarrow \forall j, \exists k_j > k_{j-1}, \text{ s.t. } m\left(\left\{|f_k - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\right\}\right) < \frac{1}{2^j}, \forall k \geqslant k_j \\
&\Rightarrow \text{子列} \{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ s.t. } m\left(\left\{|f_k - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\right\}\right) < \frac{1}{2^j}, j = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

记

$$E_j \overset{\text{def}}{=} \left\{|f_k - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\right\}$$

令

$$F_N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j=N}^{\infty}(E\backslash E_j)$$

$$\Rightarrow \forall x \in F_N, |f_{k_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j}, j = N, N+1, \cdots$$
$$\Rightarrow f_{k_j} \to f \text{ on } F_N$$

令

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N = \liminf_{j\to\infty}(E\backslash E_j)$$

$\Rightarrow f_{k_j} \to f$ on F.

Claim $m(E\backslash F) = 0$

$$E\backslash F = \bigcap_{N=1}^{\infty} \underset{\bigcup_{j=N}^{\infty} E_j}{\underset{\downarrow}{(E\backslash F_N)}} = \limsup_{j\to\infty} E_j$$

而

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} < \infty$$

$$\stackrel{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} m(\limsup_{j\to\infty} E_j) = 0$$

笔记

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{一致收敛} \\
 & & \Downarrow \\
\text{依 } L^p \text{ 范数收敛} & & \text{点态收敛} \\
\Downarrow & \text{如果} m(E) < \infty & \Downarrow \\
\text{依测度收敛} & \leftrightarrows & \text{a.e.收敛} \\
 & \text{有子列} & \Downarrow \text{Egorov} \\
 & & \text{近乎一致收敛}
\end{array}$$

2.2.3 稠密性

定义 2.2.5 (稠密的定义)

称 E 在 X 中稠密，如果 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$.

如果 $\overline{E} = X$，记作 $E \stackrel{\text{dense}}{\subset} X$

定理 2.2.8

简单函数全体 $\stackrel{\text{dense}}{\subset} L^1$.

证明 设 $f \in L^1$，先假设 $f \geqslant 0$.

$$\exists \varphi_k \geqslant 0 \text{ simple s.t. } \varphi_k \nearrow f$$
$$\stackrel{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int \varphi_k \mathrm{d}m \to \int f \mathrm{d}m$$
$$\Rightarrow ||f - \varphi_k||_1 = \int (f - \varphi_k)\mathrm{d}m \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

对于一般情形，$f=f^+-f^-$，于是存在 $\varphi_k^{(1)},\varphi_k^{(2)}\geqslant 0$，使得

$$||f^+-\varphi_k^{(1)}||_1\to 0$$
$$||f^--\varphi_k^{(2)}||_1\to 0$$

令

$$\begin{aligned}\varphi_k &\overset{\text{def}}{=} \varphi_k^{(1)}-\varphi_K^{(2)}\\ \Rightarrow ||f-\varphi_k||_1 &\leqslant ||f^+-\varphi_k^{(1)}||_1+||f^--\varphi_k^{(2)}||_1\\ &\to 0 \text{ as } k\to\infty\end{aligned}$$

定理 2.2.9

阶梯函数全体 $\overset{\text{dense}}{\subset} L^1$.

证明 只需证明阶梯函数全体 $\subset$ 可积简单函数全体，然后用三角不等式。

注意到

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N a_k\chi_{E_k}\in L^1 \Leftrightarrow \text{若}a_k\neq 0\text{，则}m(E_k)<\infty$$

约化为：

$$\forall E, m(E)<\infty, \forall\varepsilon>0, \exists\text{阶梯函数}\psi \text{ s.t.} ||\chi_E-\psi||_1<\varepsilon$$

由课本 Chapter1 定理 4.3 可知，存在互不相交的矩体 $R_1,\cdots,R_M$ 使得

$$m(E\triangle(\bigcup_{i=1}^M R_i))<\varepsilon$$

令

$$\psi\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^M \chi_{R_i}$$

$\Rightarrow ||\chi_E-\psi||_1<\varepsilon.$

定理 2.2.10

$C_c(\mathbb{R}^n)\overset{\text{dense}}{\subset} L^1$.[a]

[a] $C_c(\mathbb{R}^n)$ 是指 $\mathbb{R}^n$ 上的有紧支集连续函数全体。复习定义 1.3.7

引理 2.2.2 (Urgsohn)

设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 闭，$G\subset\mathbb{R}^n$ 开，且 $F\subset G$，则存在 $F\subset C(\mathbb{R}^n)$（连续）使得

1. $0\leqslant f\leqslant 1$
2. $f=1$ on F
3. $f=0$ on $\mathbb{R}^n\backslash G$

证明 不妨设 $F\neq\varnothing, G\neq\mathbb{R}^n$，令

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\text{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)}{\text{dist}(x,\mathbb{R}^n\backslash G)+\text{dist}(x,F)}, x\in\mathbb{R}^n$$

即为所求。证明其余部分留做习题。(此为第七次作业习题 1.)

证明 [proof of Thm] 只需证明：$\forall$ 矩体 R，$\forall\varepsilon>0$，存在 $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得 $||\chi_R-g||_1<\varepsilon$.

稍微放大 R 为开矩体 $\tilde{R}$，并且 $m(\tilde{R}\backslash R)<\varepsilon$.

下面取 g 为满足 Urgsohn 引理中的函数：

1. $0 \leqslant g \leqslant 1$
2. $g = 1$ on R
3. $g = 0$ on $\mathbb{R}^n \backslash \tilde{R}$

$$\Rightarrow g = \chi_R \text{ on } R \cup (\mathbb{R}^n \backslash \tilde{R})$$
$$\Rightarrow ||\chi_R - g||_1 < \int_{\tilde{R}\backslash R} 1 \mathrm{d}m = m(\tilde{R}\backslash R) < \varepsilon$$

定理 2.2.11

设 $1 \leqslant p < \infty$，则

1. 简单函数全体 $\overset{\text{dense}}{\subset} L^p$
2. 阶梯函数全体 $\overset{\text{dense}}{\subset} L^p$
3. $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$

证明 证明留做习题。(此为第七次作业习题 2.)

定理 2.2.12

设 $f \in L^1$

1. (平移不变性) $\int f(x-h)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x, \forall h \in \mathbb{R}^n$
2. $\int f(\lambda x)\mathrm{d}x = \lambda^{-n} \int f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int f(-x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$

证明 先假设 $f = \chi_E$，$f \in L^1 \Rightarrow m(E) < \infty$，令

$$(\tau_h f)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x-h), x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow \tau_h \chi_E = \chi_{E+h}$$
$$\Rightarrow \int \tau_h \chi_E \mathrm{d}m = m(E+h) = m(E) = \int \chi_E \mathrm{d}m$$

进而 f simple 时成立。

进而 $f \geqslant 0$ 时，$\exists \varphi_k \geqslant 0$ simple s.t. $\varphi_k \nearrow f \Rightarrow \tau_h \varphi_k \nearrow \tau_h f$

$$\Rightarrow \tau_h \varphi_k \nearrow \tau_h f$$
$$\overset{\text{MCT}}{\Rightarrow} \int f \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int \tau_h \varphi_k \mathrm{d}m = \int \tau_h f \mathrm{d}m$$

最后，一般情形时讨论 $f = f^+ - f^-$ 就可以了。

2.3 Fubini 定理及其应用

定义 2.3.1

对于 $E \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 和 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$E^y \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : (x,y) \in E\}$$

称为 E 关于 y 的 slice (切线)。

对于 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$，定义

$$E_x \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : (x,y) \in E\}$$

对于 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 上的函数 f 和 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$，定义

$$f^y(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), x \in \mathbb{R}^{n_1}$$

称为 f 关于 y 的切线。

对于 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$，定义

$$f_x(y) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), y \in \mathbb{R}^{n_2}$$

命题 2.3.1

是否成立？

1. $E \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 可测 $\Leftrightarrow E^y, E_x$ 可测
2. f 在 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 可测 $\Leftrightarrow f^y, f_x$ 可测

对于第一个命题，是不成立的。反例如下：

例 2.7.

设 A 是 R^1 中的不可测集，令 $E \overset{\text{def}}{=} A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{1+1}$ 于是 $m_2(E) = 0$，E 可测，但 $E^0 = A$ 不可测。

对于第二个命题，也是不成立的，反例如下：

例 2.8.

$f \overset{\text{def}}{=} \chi_E$ 可测，但 $f^0 = \chi_A$ 不可测。

但是，这两个命题在 a.e. 意义下是成立的！参看以下定理：

定理 2.3.1 (Fubini)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$，

1. 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}, f^y \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$;
   对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}, f_x \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$.
2. $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,\cdot)\mathrm{d}x \in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$
   $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\cdot,y)\mathrm{d}y \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$
3. $$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

定理 2.3.2 (Tonelli)

设 $f \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$，

1. 对 a.e. $y \in \mathbb{R}^{n_2}, f^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$;
   对 a.e. $x \in \mathbb{R}^{n_1}, f_x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$.
2. $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,\cdot)\mathrm{d}x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$
   $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(\cdot,y)\mathrm{d}y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$
3. $$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

推论 2.3.1 (Tonelli⇒Fubini)

设 $f = f^+ - f^- \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow f^+, f^- \in L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})\\
&\overset{\text{Tonelli}}{\Rightarrow} f^+, f^- \text{满足 } (T123)\\
f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2}) &\Rightarrow (T2,3) \text{ 中出现的积分均有限或 a.e. 有限，故可相减}\\
&\Rightarrow (F3)
\end{aligned}
$$

Idea of proof of Tonelli：令

$$
\begin{aligned}
L^+ &\overset{\text{def}}{=} L^+(\mathbb{R}^{n_1+n_2})\\
\mathcal{F} &\overset{\text{def}}{=} \{f \in L^+ : f\text{满足}(T123)\}
\end{aligned}
$$

于是 Tonelli⇔ $\mathcal{F} = L^+$.

1°：$\mathcal{F}$ 对加法和非负数乘封闭 2°：$\mathcal{F}$ 对单调增序列极限封闭

问题约化为：

$$\text{Claim} : \forall E \in \mathcal{L}, \chi_E \in \mathcal{F}$$

这是因为

$$
\left.\begin{matrix}
\left.\begin{matrix}\text{Claim}\\ 1^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{非负简单函数全体} S^+ \subset \mathcal{F}\\
2^\circ
\end{matrix}\right\} \Rightarrow L^+ \subset \mathcal{F} \overset{2^\circ}{\Rightarrow} f \in \mathcal{F}
$$

为了证明 Claim，还需要 3°：$\forall F \in F_\sigma, \chi_F \in \mathcal{F}$ 4°：$\forall Z$ with $m(Z) = 0, \chi_Z \in \mathcal{F}$

因为每个可测集都和某个 F_σ 集相差一个零测集，于是 $\forall E \in \mathcal{L}, \exists F, Z, \text{s.t. } E = F \uplus Z \Rightarrow \chi_E = \chi_F + \chi_Z \in \mathcal{F}$.

引理 2.3.1

$\mathcal{F}$ 对加法和非负数乘封闭

引理 2.3.2

$\forall f, g \in \mathcal{F}$ with $f - g \geqslant 0, g \in L^1 \Rightarrow f - g \in \mathcal{F}$.

证明

$$
\begin{aligned}
& g \in \mathcal{F} \cap L^1\\
&\Rightarrow +\infty > \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} g\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y\\
&\Rightarrow y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \mathrm{d}x \text{在 } \mathbb{R}^{n_2} \text{ 上 a.e. 有限}\\
&\Rightarrow \text{对于这些使得 } \textstyle\int_{\mathbb{R}^{n_1}} g^y \mathrm{d}x \text{ 有限的 } y\text{，} g^y \text{ 在 } \mathbb{R}^{n_1} \text{ 上 a.e. 有限}\\
&\Rightarrow f^y - g^y \text{ a.e.有定义，且} (f-g)^y = f^y - g^y \text{ a.e. on } \mathbb{R}^{n_1}
\end{aligned}
$$

同理也有 $(f-g)_x = f_x - g_x$ a.e. on $\mathbb{R}^{n_2}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} f^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\mathrm{d}m \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g)\mathrm{d}m + \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} g\mathrm{d}m \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g)\mathrm{d}m + \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} g^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} (f-g)\mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} f^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} g^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} f^y \mathrm{d}x} - \int_{\mathbb{R}^{n_1} g^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1} (f-g)^y \mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

于是可知 $f-g$ 满足 $(T3)$.

引理 2.3.3

$f_k \in \mathcal{F}$ 且 $f_k \nearrow f \Rightarrow f \in \mathcal{F}$.

证明 对每个 k，

$$\exists A_k \subset \mathbb{R}^{n_2} \text{ with } m_{n_2}(A_k) = 0$$

使得

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n_2} \backslash A_k, (f_k)^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$$

令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k$，则 $m_{n_2}(A) = 0$，且

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n_2} \backslash A, (f_k)^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$$

且

$$(f_k)^y \nearrow f^y \Rightarrow f^y \in L^+(\mathbb{R}^{n_1}) \qquad \text{(satisfy(T1))}$$

且

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y \mathrm{d}x \overset{\text{MCT}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (f_k)^y \mathrm{d}x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2}) \qquad \text{(satisfy(T2))}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f\mathrm{d}m &\overset{\text{MCT}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} f_k \mathrm{d}m \\
&\overset{(T3)\text{for } f_k}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (f_k)^y \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{MCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f^y \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \qquad \text{(satisfy(T3))}
\end{aligned}$$

引理 2.3.4

$f_k \in \mathcal{F} \cap L^1, f_k \searrow f \Rightarrow f \in \mathcal{F}$.

证明 令 $g_k = f_1 - f_k$，于是

$$\begin{aligned}
&\overset{Lem\ 2}{\Rightarrow} g_k \in \mathcal{F}, g_k \nearrow f_1 - f \\
&\overset{Lem\ 3}{\Rightarrow} f_1 - f \in \mathcal{F} \\
&\overset{Lem\ 2}{\Rightarrow} f = f_1 - (f_1 - f) \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

证明 [Pf of Tonelli] Case 1 : $E = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$,

$$E^y = \begin{cases} Q' & , \text{ if } y \in Q'' \\ \varnothing & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^{n_2}, E^y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}} \\
&\Rightarrow (\chi_E)^y = \chi_{E^y} \in L^+(\mathbb{R}^{n_1}) \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \mathrm{d} = m_{n_1}(E^y) = \begin{cases} |Q'| & , \text{if } y \in Q'' \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} = |Q'|\chi_{Q''}(y)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y &= |Q'| \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \chi_{Q''}(y) \mathrm{d}y \\
&= |Q'||Q''| = m(E) = \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \chi_E \mathrm{d}m \\
&\Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Case 2 : E 是开集，设

$$E = \biguplus_{k=1}^{\infty} Q_k \Rightarrow \chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k} \text{ a.e.}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E^y = \biguplus_{k=1}^{\infty} Q_k^y \text{ 可测} \\
&\Rightarrow (n_1\chi_E)^y = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k^y} \in L^+(\mathbb{R}^{n_1}) \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \mathrm{d}x = m_{n_1}(E^y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_{n_1}(Q_k^y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_{Q_k^y} \mathrm{d}x \\
&\Rightarrow y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \mathrm{d}x \in L^+(\mathbb{R}^{n_2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_E)^y \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y &\overset{\text{MCT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (\chi_{Q_k})^y \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\
&\overset{Case\ 1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) = m(E) = \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \chi_E \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Case 3 : E 是紧集，则

$$\exists R > 0 \text{ s.t. } E \subset B_R(0)$$

令开集 $G = B_R(0) \backslash E$，则 $E = B_R(0) \backslash G$，由引理 2.3.2 可知 $\chi_E = \chi_{B_R(0)} - \chi_G \in \mathcal{F}$.

Case 4 : E 是 F_σ 集，则

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, F_k \text{ closed}$$

不妨设 $\forall k, F_k$ 紧（否则代以 $F_k \cap \overline{B_k(0)}$），则 $\chi_{\bigcup_{k=1}^N F_k} \nearrow \chi_E$，由 $Case$ 3 得 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Case 5 : E 是零集，于是

$$\forall k, \exists G_k \text{ open, s.t. } E \subset G_k \text{ with } m(G_k) < \frac{1}{k}$$

于是令 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$，可得 G 是 G_δ 集并且零测[4]

$$\bigcap_{k=1}^{N} G_k \searrow G \Rightarrow \chi_{\bigcap_{k=1}^{N}} \searrow \chi_G \overset{Lem\ 3}{\Rightarrow} \chi_G \in \mathcal{F}$$

[4]这被称为 E 的零测包。

$$\begin{aligned}
&\overset{(T3)\text{ for }\chi_G}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}}(\chi_G)^y\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\chi_G\mathrm{d}m=m(G)=0\\
&\Rightarrow m_{n_1}(G^y)=\int_{rr^{n_1}}(\chi_G)^y\mathrm{d}x=0\text{ for a.e. }y\in\mathbb{R}^{n_2}\\
&\overset{E^y\subseteq G^y}{\Rightarrow} m_{n_1}(E^y)=0\text{ for a.e. }y\in\mathbb{R}^{n_2}\\
&\Rightarrow(\chi_E)^y=\chi_{E^y}\in L^+(\mathbb{R}^{n_1})\\
&\int_{\mathbb{R}^{n_1}}(\chi_E)^y\mathrm{d}x=m_{n_1}(E^y)=0\\
&\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left[\int_{\mathbb{R}^{n_1}}(\chi_E)^y\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=0=\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\chi_E\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

故 $\chi_E\in\mathcal{F}$.

推论 2.3.2

设 $E\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$

1. 对于 a.e. $y\in\mathbb{R}^{n_2}, E^y\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$
   对于 a.e. $x\in\mathbb{R}^{n_1}, E_x\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}}$
2. $y\mapsto m_{n_1}(E^y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测
   $x\mapsto m_{n_2}(E_x)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测
3. $m(E)=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}m(E^y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}m(E_x)\mathrm{d}x$

笔记 是否成立？

$$\forall y\in\mathbb{R}^{n_2}, E^y\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}\Rightarrow E\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$$

不成立，反例如下：

例 2.9.

令 $E=[0,1]\times A$ with $A\subset\mathbb{R}^1$ 不可测，且

$$E^y=\begin{cases}[0,1] & ,\text{if } y\in A\\ \varnothing & ,\text{if } y\in\mathbb{R}^1\backslash A\end{cases}$$

但 $E\notin\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}}$，否则对于 a.e. $x\in[0,1], E_x\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{n_1}$，而当 $x\in[0,1]$ 时，$E_x=A$.

定义 2.3.2

对于 $E_1\subset\mathbb{R}^{n_1}, E_2\subset\mathbb{R}^{n_2}$

$$E_1\times E_2\overset{\text{def}}{=}\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}:x\in E_1,y\in E_2\}$$

称为 E_1 和 E_2 的乘积集合。

定理 2.3.3

$$\left.\begin{aligned}E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\\ m^*_{n_2}(E_2)>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow E_1\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$$

证明

$$\begin{aligned}
E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}&\Leftrightarrow\chi_{E_1\times E_2}\in L^+(\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}})\\
&\overset{\text{Tonelli}}{\Rightarrow}\chi^y_{E_1\times E_2}\in L^+(\mathbb{R}^{n_1})\text{ for a.e. }y\in\mathbb{R}^{n_2}
\end{aligned}$$

而 $\chi^y_{E_1\times E_2}(x)=\chi_{E_1\times E_2}(x,y)=\chi_1E_1(x)\chi_{E_2}(y)$，只需证明：

$$\exists y\in E_2 \text{ s.t. } \chi^y_{E_1\times E_2}\in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$$

令

$$\begin{aligned}
&F\overset{\text{def}}{=}\{y\in\mathbb{R}^{n_2}:(E_1\times E_2)^y\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}\}\\
\overset{\text{Cor}}{\Rightarrow}&m_{n_2}(F^c)=0\\
&E_2=(E_2\cap F)\cup(E_2\cap F^c)\\
\Rightarrow&0<m^*_{n_2}(E_2)\leqslant m^*_{n_2}(E_2\cap F)+m^*_{n_2}(E_2\cap F^c)\\
\Rightarrow&m^*_{n_2}(E_2\cap F)>0\\
\Rightarrow&E_2\cap F\neq\varnothing
\end{aligned}$$

定理 2.3.4

$$\left.\begin{matrix}E_1\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}\\ E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\\ m_{n_1+n_2}(E_1\times E_2)=m_{n_1}(E_1)m_{n_2}(E_2)\end{matrix}\right.$$

证明 Claim：$m^*_{n_1+n_2}(E_1\times E_2)\leqslant m^*_{n_1}(E_1)m^*_{n_2}(E_2)$. 证明如下：

如果 $m^*_{n_1}(E_1),m^*_{n_2}(E_2)<\infty$，$\forall\varepsilon>0$，存在方体覆盖 $\{Q^{(1)}_j\}_{j=1}^\infty,\{Q^{(2)}_k\}_{k=1}^\infty$ 覆盖了 E_1,E_2 且

$$\sum_{j=1}^\infty|Q^{(1)}_j|<m^*_{n_1}(E_1)+\varepsilon$$
$$\sum_{k=1}^\infty|Q^{(2)}_k|<m^*_{n_2}(E_2)+\varepsilon$$

$\Rightarrow\{Q^{(1)}_j\times Q^{(2)}_k\}_{j,k}$ 是 $E_1\times E_2$ 的矩体覆盖。[5]

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow m^*_{n_1+n_2}(E_1\times E_2)\\
&\leqslant\sum_{j,k}|Q^{(1)}_j\times Q^{(2)}_k|=\left(\sum_{j=1}^\infty|Q^{(1)}_j|\right)\left(\sum_{k=1}^\infty|Q^{(2)}_k|\right)<(m^*_{n_1}(E_1)+\varepsilon)(m^*_{n_2}(E_2)+\varepsilon)\\
&\overset{\varepsilon\to0^+}{\Rightarrow}m^*_{n_1+n_2}(E_1\times E_2)\leqslant m^*_{n_1}(E_1)m^*_{n_2}(E_2)
\end{aligned}$$

如果 $m^*_{n_1}(E_1)=+\infty$，$m^*_{n_2}(E_2)=0$，设

$$E_1=\bigcup_{k=1}^\infty E_1^{(k)}\text{ with }\overset{\text{def}}{=}B_k(0)\cap E_1$$

$$\Rightarrow E_1\times E_2=\bigcup_{k=1}^\infty(E_1^{(k)}\times E_2)$$

$$\Rightarrow m^*_{n_1+n_2}(E_1\times E_2)\leqslant\sum_{k=1}^\infty m(E_1^{(k)}\times E_2)\leqslant\sum_{k=1}^\infty m^*_{n_1}(E_1^{(k)})m^*_{n_2}(E_2)=0=m^*_{n_1}(E_1)m^*_{n_2}(E_2)$$

其余情况平凡。

接下来证明定理：只需证明 $E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$，然后用 Fubini.

可测集可以表示成 G_δ 集减去一个零测集，设 $E_1=G_1\backslash Z_1$，$E_2=G_2\backslash Z_2$，则 $G_1\times G_2$ 是 $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 中的 G_δ 集，于是

$$(G_1\times G_2)\backslash(E_1\times E_2)\subset[(G_1\backslash E_1)\times G_2]\cup[G_1\times(G_2\backslash E_2)]$$

这是两个零测集的并，所以也是零测的，进而 $(G_1\times G_2)\backslash(E_1\times E_2)$ 是可测的，所以 $E_1\times E_2$ 是可测的。

[5] Chapter1 Ex15.

定理 2.3.5 (积分的几何意义)

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数，

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}:0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

1. $f^+\in(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow A\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}$
2. $f^+\in(\mathbb{R}^n)\Rightarrow\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x=m_{n+1}(A)$

引理 2.3.5

设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的可测函数，令

$$\tilde{f}(x,y)\overset{\text{def}}{=}f(x),(x,y)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

则 $\tilde{f}(x,y)$ 也是可测函数。

证明 [Pf of Lem]

$$E(a)\overset{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^{n_1}:f(x)<a\}\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{n_1}\Rightarrow\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}:\tilde{f}(x,y)<a\}=E(a)\times\mathbb{R}^{n_2}\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{n_1+n_2}$$

证明 [Pf of Thm]

1. $(\Rightarrow)$:

$$f\in L^+(\mathbb{R}^{n_1})\Rightarrow E(x,y)\overset{\text{def}}{=}y-f(x)\text{在 }\mathbb{R}^{n+1}\text{ 上可测}$$
$$\Rightarrow A=\{y\geqslant 0\}\cap\{F\leqslant 0\}\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

$(\Leftarrow)$: $\forall x\in\mathbb{R}^n,A_x=[0,f(x)]\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^1}$ 且 $x\mapsto m_1(A_x)\in L^+(\mathbb{R}^n)$，而 $f(x)=m_1(A_x)\Rightarrow f\in L^+(\mathbb{R}^n)$.

2. $m_{n+1}(A)=\int_{\mathbb{R}^n}m_1(A_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x$.

定理 2.3.6

f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测，则 $(x,y)\mapsto f(x-y)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上可测。

证明 $\forall a\in\mathbb{R},E(a)\overset{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)>a\}\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$

欲证

$$\tilde{E}(a)\overset{\text{def}}{=}\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}:f(x-y)>a\}\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$$

令

$$\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n,(x,y)\mapsto x-y\to\tilde{E}(a)=\Phi^{-1}(E(a))$$

约化为：Claim:

$$\Phi^{-1}(E)\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}},\forall E\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$$

注意到 Φ 连续，

1.
$$\forall G\overset{G_\delta}{\subset}\mathbb{R}^n,\Phi^{-1}(G)\overset{G_\delta}{\subset}\mathbb{R}^{2n},G=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k,G_k\text{ open}$$
$$\Rightarrow\Phi^{-1}(G)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Phi^{-1}(G_k)\text{ open}$$
$$\Rightarrow\Phi^{-1}(G)\text{ is }G_\delta\text{ set.}$$

2. $\forall\overset{\text{null}}{\subset}\mathbb{R}^n,\Phi^{-1}(Z)\overset{\text{null}}{\subset}\mathbb{R}^{2n},m_n(Z)=0$.

$$\Rightarrow\exists G\overset{G_\delta}{\subset}\mathbb{R}^n,Z\subset G\text{ and }m_n(G)=0$$

令

$$
\begin{aligned}
&\tilde{G} \overset{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(G) \\
&\overset{\text{Step1}}{\Rightarrow} \tilde{G} \text{ is } G_\delta \text{ set in } \mathbb{R}^{2n} \\
&\text{and } m_{2n}(\tilde{G}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\tilde{G}} \mathrm{d}m_{2n} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\tilde{G}}^y \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\chi_{\tilde{G}}^y(x) = 1 &\Leftrightarrow (x, y) \in \Phi^{-1}(G) \\
&\Leftrightarrow x - y \in G \\
&\Leftrightarrow x \in G + y \\
&\Leftrightarrow \chi_{G+y}(x) = 1
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
m_{2n}(\tilde{G}) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\tilde{G}} \mathrm{d}m_{2n} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\tilde{G}}^y \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m_n(G + y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m_n(G) \mathrm{d}y = 0 \\
&\overset{\Phi^{-1}(Z) \subset \tilde{G}}{\Rightarrow} m_{2n}(\Phi^{-1}(Z)) = 0
\end{aligned}
$$

3. $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, E = G \backslash Z \Rightarrow \Phi^{-1}(E) = \Phi^{-1}(G) \backslash \Phi^{-1}(Z) \overset{\text{Step1,2}}{\Rightarrow} \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2n}}$

定义 2.3.3 (卷积)

设 f, g 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测，如果对于 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$，$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 有限，称之为 f 与 g 的卷积，记作

$$
(f * g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y
$$

♣

定理 2.3.7

如果 $f, g \in L^1$，则 $f * g$ a.e. 有限，且 $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 ||g||_1$.

♡

第 3 章 微分论

关于“极大”的相关概念，用板球或其他任何类似游戏的言语是最容易的叙述方式：在这些游戏中选手报告一系列成绩，对这些成绩取平均就得到选手的成绩。

G.H.Hardy 与 J.E.Littlewood, 1930

3.1 复习：Riemann 积分框架下的 FTOC

FTOC 指微积分基本定理。

定理 3.1.1

$$f \in C[a,b] \Rightarrow F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b], F(x)\text{在 } [a,b] \text{ 上可微且} F'(x) = f(x).$$

注 $f \in C[a,b]$ 换成 $f \in R[a,b]$ 或者 $f \in L^1[a,b]$，是否成立？

在 a.e. 意义下是成立的，见 Lebesgue 微分定理。

定理 3.1.2 (Newton-Leibniz)

F 可微，$F' \in R[a,b]$，则

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

注 条件改成 a.e. 可微，$F' \in L^1[a,b]$，是否成立？

答案是否定的，反例：

$$F(x) = \begin{cases} A & , x = a \\ 0 & , a < x < b \\ B & , x = b \end{cases}$$

条件改成 a.e. 可微，$F \in C[a,b]$，$F' \in L^1[a,b]$，是否成立？

答案是否定的，反例：Cantor-Lebesgue 函数.[1]

3.2 积分的微分

3.2.1 Hardy-Littlewood 极大函数与 Lebesgue 微分定理

为了将定理 3.1.1 推广到高维，注意到

$$\begin{aligned} F' = f \Leftrightarrow & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \\ \Rightarrow & \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \end{aligned}$$

更一般地，有

$$\lim_{|I|\to 0, I\ni x}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)\mathrm{d}y = f(x)$$

问：

$$f\in L^1(\mathbb{R}^n)\overset{?}{\Rightarrow}\lim_{m(B)\to 0, B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B f\mathrm{d}m = f(x) \text{ for a.e. } x\in\mathbb{R}^n$$

定义 3.2.1

$$L^1_{loc}\overset{\text{def}}{=}\{f : f\in L^1(K), \forall K\subset\subset\mathbb{R}^n\}$$

$K\subset\subset\mathbb{R}^n$ 表示 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集，L^1_{loc} 里的元素被称为局部可积函数，但我更喜欢叫它紧可积函数，因为"紧一致收敛"有类似的定义。

定理 3.2.1 (Lebesgue 微分定理，LDT)

$$f\in L^1_{loc}\Rightarrow\lim_{m(B)\to 0, B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B f\mathrm{d}m = f(x) \text{ for a.e. } x\in\mathbb{R}^n$$

定义 3.2.2

对于 $f\in L^1_{loc}$，

$$f^*(x)\overset{\text{def}}{=}\sup_{B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B |f|\mathrm{d}m, x\in\mathbb{R}^n$$

称为 f 的（非中心）H-L 极大函数；

$$Mf(x)\overset{\text{def}}{=}\sup_{r>0}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_R(x)} |f|\mathrm{d}m$$

称为 f 的中心 H-L 极大函数。

推论 3.2.1

$Mf(x)\leqslant f^*(x)\leqslant 2^n Mf(x)$.

证明 由定义，左边不等号显然。对于 x，不妨设

$$Mf(x) = \frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f|\mathrm{d}m$$

[1] 见 Chapter1 Ex2.

则取半径为 $r/2$ 的球 $B \ni x$，则一定有 $B \subset B_r(x)$，于是

$$2^n Mf(x) = \frac{1}{m(B)} \int_{B_r(x)} |f| \mathrm{d}m \geqslant \frac{1}{m(B)} \int_B |f| \mathrm{d}m \geqslant f^*(x)$$

定理 3.2.2

$f \in L^1_{loc} \Rightarrow Mf$ 下半连续，即 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{Mf > \alpha\}$ 是开集。

证明

$$\begin{aligned}
x \in \{Mf > \alpha\} \Leftrightarrow \alpha < Mf(x) &\Rightarrow \exists r > 0 \text{ s.t. } \alpha < \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| \mathrm{d}m \\
&\Rightarrow \exists \rho > r \text{ s.t. } \alpha < \frac{1}{m(B_\rho(x))} \int_{B_r(x)} |f| \mathrm{d}m \\
\forall y \in B_{\rho-r}(x), B_r(x) \subset B_\rho(y) \Rightarrow \alpha &< \frac{1}{m(B_\rho(y))} \int_{B_r(x)} |f| \mathrm{d}m \\
&\leqslant \frac{1}{m(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(x)} |f| \mathrm{d}m \leqslant Mf(y) \\
&\Rightarrow B_{\rho-r}(x) \subset \{Mf > \alpha\}
\end{aligned}$$

推论 3.2.2

$f \in L^1_{loc} \Rightarrow Mf$ 可测。

注 $f \in L^1_{loc} \Rightarrow f^*$ 可测，这是因为 $x \in \{f^* > \alpha\}$ 则存在 $B \ni x$ 使得

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f| \mathrm{d}m > \alpha$$

B 是开球，对于任意的 $y \in B$，上式也成立，所以整个 $B \subset \{f^* > \alpha\}$，所以是开集，进而可测。

定理 3.2.3 (H-L 极大定理)

算子 $M : L^1 \Rightarrow L^+, f \mapsto Mf$ 是弱 $(1,1)$ 型的，即：

$$\exists C > 0, \text{s.t. } m(\{Mf > \alpha\}) \leqslant \frac{C}{\alpha} ||f||_1, \forall \alpha > 0, \forall f \in L^1$$

推论 3.2.3

$f \in L^1 \Rightarrow Mf$ a.e. 有限。

证明

$$\begin{aligned}
&\{Mf = +\infty\} \subset \{Mf > \alpha\}, \forall \alpha \\
\Rightarrow &m(\{Mf = +\infty\}) \leqslant m(\{Mf > \alpha\}) \leqslant \frac{C}{\alpha} ||f||_1 \to 0 \text{ as } \alpha \to +\infty
\end{aligned}$$

定理 3.2.4 (Vitali 覆盖引理)

$\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{B_1, \cdots, B_N\}$ 是有限个开球，则存在 $B_{k_1}, \cdots, B_{k_p} \in \mathcal{B}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}) \geqslant \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right)$$

证明 令 $B^* = B$ 的同心球，且 $\mathrm{diam}(B^*) = 3\mathrm{diam}(B)$，则

$$\forall B, B' \text{ with } B \cap B' = \varnothing, \mathrm{diam}(B') \leqslant \mathrm{diam}(B) \Rightarrow B' \subset B^*$$

现在开始选取，原则是先挑大的：从 $\mathcal{B}$ 中选出半径最大的 B_{k_1}（不唯一则任选其一），并从 $\mathcal{B}$ 中删除与 B_{k_1} 相交

者（这些球可以被 $B_{k_1}^*$ 所覆盖），余下的球全体记作 $\mathcal{B}_1$.

对 $\mathcal{B}_1$ 做同样的操作，选出最大者 B_{k_2}，并删除与之相交者。

最终得到 $B_{k_1},\cdots,B_{k_p}$ 互不相交。Claim:

$$\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}) \geqslant \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right)$$

$$\begin{aligned}
&\forall B\in\mathcal{B},\exists j\in\{1,\cdots,p\}\text{ s.t. } B\cap B_{k_j}\neq\varnothing \text{ and } \operatorname{diam}(B)\leqslant\operatorname{diam}(B_{k_j})\\
\Rightarrow& B\subset B_{k_j}^*\\
\Rightarrow& \bigcup_{k=1}^{N} B_k\subset\bigcup_{j=1}^{p} B_{k_j}^*\\
\Rightarrow& m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right)\leqslant\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}^*)=3^n\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j})
\end{aligned}$$

证明 [Pf of H-L] 令 $E_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{Mf>\alpha\}$

$$\begin{aligned}
&\forall x\in E_\alpha,\exists r_x\text{ s.t. }\frac{1}{m(B_{r_x}(x))}\int_{B_{r_x}(x)}|f|\mathrm{d}m>\alpha\Rightarrow m(B_{r_x}(x))<\frac{1}{\alpha}\int_{B_{r_x}(x)}|f|\mathrm{d}m\\
&\forall K\subset\subset E_\alpha\subset\bigcup_{x\in E_\alpha}B_{r_x}(x),\exists B_1,\cdots,B_N\in\{B_{r_x}(x)\}_{x\in E_\alpha}\text{ s.t. }K\subset\bigcup_{k=1}^{N}B_k\\
&\overset{\text{Vitali}}{\Rightarrow}\exists B_{k_1},\cdots,B_{k_p}\in\{B_1,\cdots,B_N\}\text{互不相交，使得}m\left(\bigcup_{k=1}^{N}B_k\right)\leqslant 3^n\sum_{j=1}^{p}m(B_{k_j})\\
&\Rightarrow m(K)\leqslant 3^n\sum_{j=1}^{p}m(B_{k_j})\leqslant 3^n\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\alpha}\int_{B_{k_j}}|f|\mathrm{d}m=\frac{3^n}{\alpha}\int_{\bigcup_{j=1}^{p}B_{k_j}}|f|\mathrm{d}m\leqslant\frac{3^n}{\alpha}||f||_1\\
&\Rightarrow m(E_\alpha)=\sup\{m(K):K\subset\subset E_\alpha\}\leqslant\frac{3^n}{\alpha}||f||_1
\end{aligned}$$

证明 [Pf of LDT]

1. 先假设 $f\in C(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R}^n,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t. }|f(y)-f(x)|<\varepsilon,\forall y\in B_\delta(x)\\
\Rightarrow&\forall r<\delta,\left|\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}f(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y<\varepsilon
\end{aligned}$$

2. 设 $f\in L^1_{loc}$，不妨设 $f\in L^1$（否则代以 $f\chi_B$），令

$$E\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^n:\limsup_{r\to0^+}\left|\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}f\mathrm{d}m-f(x)\right|>0\right\}$$

只需证 $m(E)=0$. 令

$$E_\alpha\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^n:\limsup_{r\to0^+}\left|\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}f\mathrm{d}m-f(x)\right|>2\alpha\right\}$$

于是 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{\frac{1}{k}}$，问题约化为：

$$\text{Claim}:\forall\alpha>0,m(E_\alpha)=0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n), \text{s.t. } ||f-g||_1 < \varepsilon (\because C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^1)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)-g(y)|\mathrm{d}y + \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} g(y)\mathrm{d}y - g(x) \right| \\
&\quad + |g(x)-f(x)|
\end{aligned}$$

第一项 $\leqslant M(f-g)(x)$，第二项 $\to 0$ as $r \to 0^+$ by Step1.

$$\Rightarrow \limsup_{r\to 0^+} \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| \leqslant M(f-g)(x) + |f(x)-g(x)|$$

令 $F_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{M(f-g) > \alpha\}, G_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{|f-g| > \alpha\}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E_\alpha \subset F_\alpha \cup G_\alpha \\
\mathrm{H-L} &\Rightarrow m(F_\alpha) \leqslant \frac{3^n}{\alpha}||f-g||_1 < \frac{3^n}{\alpha}\varepsilon \\
\text{Tchebyshev} &\Rightarrow m(G_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}||f-g||_1 < \frac{1}{\alpha}\varepsilon \\
&\Rightarrow m(E_\alpha) < \frac{3^n+1}{\alpha}\varepsilon
\end{aligned}$$

定义 3.2.3

设 $E \in \mathcal{L}$，如果

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(E\cap B_r(x))}{m(B_r(x))} = 1$$

则称 x 是 E 的一个 Lebesgue 密度点。

推论 3.2.4

设 $E \in \mathcal{L}$，

1. a.e. $x \in E$ 都是 E 的密度点；
2. a.e. $x \in E^c$ 都不是 E 的密度点。

证明

$$\begin{aligned}
\frac{m(E\cap B_r(x))}{m(B_r(x))} &= \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \chi_E \mathrm{d}m \\
&\to \chi_E(x) \text{ as } r \to 0^+ \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

定理 3.2.5

$$f \in L^1_{loc} \Rightarrow \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 0 \text{ a.e. } x$$

这样的 x 称为 f 的 Lebesgue 点，全体 f 的 Lebesgue 点记作 L_f，此定理即：$f \in L^1_{loc} \Rightarrow$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ 都是 f 的 Lebesgue 点。

证明 即证 $m(\mathbb{R}^n \backslash L_f) = 0$.

$\forall q \in \mathbb{Q}, \exists E_q \subset \mathbb{R}^n$ with $m(E_q) = 0$, s.t.

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)-q|\mathrm{d}y = |f(x)-q|, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash E_q$$

令 $E \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$，则 $m(E)=0$，Claim:$\mathbb{R}^n\backslash E \subset L_f$，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\backslash E \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R}^n\backslash E_q)$$

不妨设 $f(x)$ 有限（因为 f a.e. 有限），$\forall \varepsilon>0, \exists q\in\mathbb{Q}$ s.t. $|f(x)-q|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}|f(y)-q|\mathrm{d}y+|q-f(x)|$$

$$\Rightarrow \limsup_{r\to0^+}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 2|f(x)-q|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to0^+}\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 0$$

定义 3.2.4

设 $x\in\mathbb{R}^n$，如果 $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{L}$ 满足

1. $\forall\varepsilon>0, \exists E\in\mathcal{F}_x$ s.t. $\mathrm{diam}(E)<\varepsilon$
2. $\exists c>0, \text{s.t. } m(E)>c\cdot m(B^E(x)), \forall E\in\mathcal{F}_x$

这里的 $B^E(x)$ 是以 x 为中心，包含 E 的最小开球，则称 $\mathcal{F}_x$ 正则收缩于 x.

例 3.1.

$\{\text{开球}B : B\ni x\}, \{\text{方体}Q : Q\ni x\}, \{B_{2r}(x)\backslash B_r(x)\}_{r>0}$ 都正则收缩于 x.

$\{\text{矩体}R : R\ni x\}$ 不正则收缩于 x.

$\{\text{矩体}R\subset\mathbb{R}^2 : R\text{长宽比固定且}R\ni x\}$ 正则收缩于 x.

推论 3.2.5

设 $f\in L^1_{loc}, x\in L_f, \mathcal{F}_x$ 正则收缩于 x，则

$$\lim_{diam(E)\to0, E\in\mathcal{F}_\alpha}\frac{1}{m(E)}\int_E f\mathrm{d}m = f(x)$$

证明 设 $E\in\mathcal{F}_x$，

$$\frac{1}{m(E)}\int_E|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{c}\frac{1}{m(B^E(x))}\int_{B^E(x)}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y$$

$$\to 0 \text{ as } \mathrm{diam}(B^E(x))\to 0$$

推论 3.2.6

$$f\in L^1_{loc}\Rightarrow \lim_{m(B)\to0, B\ni x}\frac{1}{m(B)}\int_B f\mathrm{d}m = f(x) \text{ for a.e. } x$$

推论 3.2.7

$f\in L^1_{loc}$，则

$$\text{a.e. } x\in\mathbb{R}^1, \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\mathrm{d}y = f(x) \Rightarrow F'=f \text{ a.e. where } F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

3.2.2 恒等元逼近 *

定理 3.2.6 (LDT 等价形式)

令

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N_n}\chi_{B_1(0)}, v_n \overset{\text{def}}{=} m(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

则 $\int \varphi \mathrm{d}m = 1$. 令

$$\varphi_t(x) \overset{\text{def}}{=} t^{-n}\varphi(t^{-1}x)$$

则有

$$\begin{aligned}(f*\varphi_t)(x) =& \frac{1}{v_n t^n}\int f(x-y)\chi_{B_1(0)}(t^{-1}y)\mathrm{d}y \\ =& \frac{1}{v_n t^n}\int_{B_t(0)} f(x-y)\mathrm{d}y \\ =& \frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} f(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$LDT \Leftrightarrow \forall f \in L^1_{loc}, f*\varphi_t \to f \text{ a.e. as } t \to 0^+$$

定义 3.2.5 (恒等元逼近，Approximations to the Identity，A.I.)

设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是一族可测函数，满足

(A1) $\int K_t \mathrm{d}m = 1$

(A2) $\exists C_1 > 0$ s.t. $|K_t(x)| \leqslant \frac{C_1}{t^n}, \forall t \in (0,1)$

(A3) $\exists C_2 > 0$ s.t. $|K_t(x)| \leqslant \frac{C_2 t}{|x|^{n+1}}, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

则称 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

定理 3.2.7

设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$$\forall f \in L^1, f*K_t \to f \text{ a.e. as } t \to 0^+$$

引理 3.2.1

设 $f \in L^1, x \in L_f$

$$g(r) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y, r > 0$$

则

1. g 在 $(0,\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$.
2. g 有界。

证明 [Pf of lemma]

1. $\forall r \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}g(r+h)-g(r) =& \frac{1}{(r+h)^n}\int_{B_{r+h}(0)\backslash B_r(0)} |f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y \\ &+ \left[\frac{1}{(r+h)^n} - \frac{1}{r^n}\right]\int_{B_r(0)} |f(x-y)-f(x)|\end{aligned}$$

$h \to 0$ 时，由积分的绝对连续性，第一项 $\to 0$，第二项里的 $\left[\frac{1}{(r+h)^n} - \frac{1}{r^n}\right] \to 0$. 这就证明了 g 的连续性。

而且

$$\lim_{r\to 0^+} g(r) = v_n \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 0$$

2. $g\in C(0,1]$，$g(0^+)$ 存在，所以 g 在 $(0,1]$ 上有界。当 $r>1$，

$$g(r) \leqslant \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)|\mathrm{d}y + v_n|f(x)| \leqslant ||f||_1 + v_n|f(x)|$$

证明 [Pf of Thm]

$$\begin{aligned}|(f*K_t)(x)| &\leqslant \int |f(x-y)-f(x)|\cdot|K_t(y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_{|y|\leqslant t} |f(x-y)-f(x)|\cdot|K_t(y)|\mathrm{d}y + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\cdot t<|y|2^{k+1}\cdot t}\cdots\mathrm{d}y\end{aligned}$$

第一项：

$$\int_{|y|\leqslant t} |f(x-y)-f(x)||K_t(y)|\mathrm{d}y \overset{(A2)}{\leqslant} \frac{C_1}{t^n}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y = C_1 g(t)$$

第二项：

$$\begin{aligned}\int_{2^k\cdot t<|y|2^{k+1}\cdot t}\cdots\mathrm{d}y \overset{(A3)}{\leqslant} &\frac{C_2 t}{(2^k t)^{n+1}}\int_{|y|\leqslant 2^{k+1}t}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\\ =&\frac{C_2\cdot 2^n}{2^k}\frac{1}{(2^{k+1}t)^n}\int_{|y|\leqslant 2^{k+1}t}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y\\ =&\frac{C_3}{2^k}g(2^{k+1}t)\\ \Rightarrow |(f*K_t)(x)-f(x)| \leqslant &C\left[g(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}g(2^{k+1}t)\right]\end{aligned}$$

令 $M \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\in(0,\infty)} g(t)$，则

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \text{ s.t. } \sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

且当 t 充分小时，

$$g(t)<\varepsilon, g(2^{k+1}t) < \frac{\varepsilon}{N}, k=0,1,\cdots,N-1$$

$\Rightarrow |(f*K_t)(x)-f(x)| \leqslant C(2\varepsilon+M\varepsilon)$，当 t 充分小。

定理 3.2.8

设 $\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$$\forall f\in L^1, ||f*K_t - f||_1 \to 0 \text{ as } t\to 0^+$$

引理 3.2.2 (平均连续性)

设 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p$，则

$$||\tau_h f - f||_p \to 0 \text{ as } h\to 0$$

其中 $(\tau_h f)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x-h)$.

证明

1. 先假设 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$，当 $|h|<1$ 时，$\mathrm{supp}(\tau_h f)\subset \mathrm{supp}(f)+\overline{B_1(0)}$，记作 K，

$$\int |(\tau_h f)(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant \left[\sup_K |(\tau_h f)(x)-f(x)|\right]^p m(K) \to 0 \text{ as } h\to 0$$

2. 一般情形：

$$
\begin{aligned}
&\forall f\in L^p,\forall\varepsilon>0,\exists g\in C_c(\mathbb{R}^n)\text{ s.t. }||f-g||_p<\frac{\varepsilon}{3}\\
\Rightarrow&||\tau_hf-f||_p\leqslant||\tau_hf-\tau_hg||_p+||\tau_hg-g||_p+||g-f||_p\\
&=2||f-g||_p+||\tau_hg-g||_p<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon,|h|\text{充分小}
\end{aligned}
$$

证明 [Pf of Thm]

$$
\begin{aligned}
||K_t||_1&=\int_{|y|\leqslant t}|K_t|\mathrm{d}y+\int_{|y|\geqslant t}|K_t|\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_{|y|\leqslant t}\frac{C_1}{t^n}\mathrm{d}y+\int_{|y|\geqslant t}\frac{C_2t}{|y|^{n+1}}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

第一项 $\leqslant\frac{C_1}{t^n}v_nt^n$，第二项 $=\int_{|x|\geqslant1}\frac{C_2t\cdot t^n}{t^{n+1}|x|^{n+1}}\mathrm{d}x$，所以 $||K_t||_1\leqslant C$.

$$
\begin{aligned}
&||f*K_t-f||_1\\
&=\int\left|\int[f(x-y)-f(x)]K_t(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{Tonelli}}{\leqslant}\int\left[\int|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}x\right]|K_t(y)|\mathrm{d}y\\
&=\int||\tau_yf-f||_1|K_t(y)|\mathrm{d}y\\
&\overset{\text{Lem}}{\Rightarrow}\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t. }||\tau_yf-f||_1<\varepsilon,\forall y\in B_\delta(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow||f*K_t-f||_1&\leqslant\int_{|y|<\delta}||\tau_yf-f||_1|K_t(y)|\mathrm{d}y+\int_{|y|\geqslant\delta}||\tau_yf-f||_1|K_t(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\varepsilon+2||f||_1\int_{|y|\geqslant\delta}|K_t(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\varepsilon+2||f||_1\int_{|y|\geqslant\delta}\frac{C_2t}{|y|^{n+1}}\mathrm{d}y<\varepsilon,t\text{充分小}
\end{aligned}
$$

例 3.2.

一个 A.I. 的例子：上半平面的 Poisson 核

$$
K_y(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},x\in\mathbb{R},y>0,K(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}
$$

$$
\Rightarrow K_y(x)=y^{-1}K(y^{-1}x)
$$

$$
\int_{\mathbb{R}}K(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctan}x|_{-\infty}^{+\infty}=1\Rightarrow\int K_y\mathrm{d}x=1.
$$

$$
|K_y(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{1}{y},\forall y>0
$$

$$
|K_y(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2},\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\forall y>0
$$

所以 $\{K_y\}$ 是一个 A.I.

$$
\forall f\in L^1,y\to0^+\text{时},||f*K_y-f||_1\to1,f*K_y\to f
$$

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)K_y(x)=0
$$

于是 $(Pf)(x,y) \overset{\text{def}}{=} (f * K_y)(x)$ 调和 in $\mathbb{R}^2_+$，是下列位势方程的解：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2_+ \\ u = f & \text{on } \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases}$$

下面是 A.I. 的一个应用。

定义 3.2.6

$C_c^\infty \overset{\text{def}}{=} \{$紧支光滑函数$\}$

定理 3.2.9

$C_c^\infty \overset{\text{dense}}{\subset} L^p, 1 \leqslant p < \infty.$

证明 令

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-|x|^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

于是 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\mathrm{supp}(\psi) \subset B_1(0)$，$0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$. 令

$$K(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi(x)}{||\psi||_1}, K_t(x) \overset{\text{def}}{=} t^{-n} K(t^{-1}x)$$

Claim:$\{K_t\}_{t>0}$ 是 A.I.

$$\text{直接计算可得：} \int K_t \mathrm{d}m = 1$$

$$|K_t(x)| \leqslant \frac{C_1}{t^n} \text{ with } C_1 = \frac{1}{||\psi||_1}$$

$$\mathrm{supp}(K_t) \subset B_t(0)$$

当 $|x| \leqslant t$ 时，$|K_t(x)| \leqslant \frac{C_1}{t^n} = \frac{C_1 t}{t^{n+1}} \leqslant \frac{C_1 t}{|x|^{n+1}}$.

$\forall f \in L^p, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$$||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

$C_c(\mathbb{R}^n) \overset{\text{dense}}{\subset} L^p$，$\mathrm{supp}(g * K_t) \subset \mathrm{supp}(g) + \mathrm{supp}(K_t) \Rightarrow g * K_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A.I.$\Rightarrow$ t 充分小时，$||g * K_t - g||_p < \frac{\varepsilon}{2}$，所以

$$||f - g * K_t||_p \leqslant ||f - g||_p + ||g - g * K_t||_p < \varepsilon$$

3.3 函数的可微性

3.3.1 有界变差函数

问：$N - L \Leftrightarrow ?$

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ a.e. 可微} \\ F' \in L^1[a,b] \\ F\text{连续} \end{cases}$$

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \int_{[x,x+h]} |F'(t)|\mathrm{d}t \to 0 \text{ as } h \to 0$$

定义 3.3.1

设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(x(t),y(t))=z(t)$ 连续，如果存在 $M>0$ 对于任何划分

$$P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

都有

$$\sum_{k=1}^{N}|z(t_k)-z(t_{k-1})|\leqslant M$$

则称 γ 为可求长曲线，并定义

$$L(\gamma)\overset{\text{def}}{=}\sup_{P}\sum_{k=1}^{N}|z(t_k)-z(t_{k-1})|$$

称为 γ 的弧长。

定义 3.3.2

对 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 和 $[a,b]$ 的划分 P，定义

$$V(f,P)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-f(t_{k-1})|$$

如果 $\sup\limits_{P} V(f,P)<\infty$，则称 f 是有界变差的。

$$V_a^b(f)\overset{\text{def}}{=}\sup_{P}V(f,P)$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差。

$$BV[a,b]\overset{\text{def}}{=}\{[a,b]\text{上的有界变差函数全体}\}$$

推论 3.3.1

由定义可得：

1. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(x(t),y(t))$ 可求长 $\Leftrightarrow x,y\in BV[a,b]$.
2. $BV[a,b]$ 是向量空间。

推论 3.3.2

设 $f\in C[a,b]$

$$f\in BV[a,b]\Leftrightarrow f\text{的图像可求长}$$

例 3.3.

$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 可微，且 f' 有界，则 $f\in BV[a,b]$.

证明 令 $M\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{t\in[a,b]}|f'(t)|$

$$\overset{\text{广义微分中值}}{\Rightarrow}|f(t)-f(s)|\leqslant M|t-s|,\forall t,s\in[a,b]$$

$$\Rightarrow V(f,P)\leqslant M\sum_{k=1}^{N}(t_k-t_{k-1})=M(b-a)$$

例 3.4.

$$f(t)=\begin{cases} t\cdot\sin\frac{1}{t} & ,t\in(0,1] \\ 0 & ,t=0 \end{cases}$$

那么 $f\notin BV[0,1]$.

证明 $\forall N$，令 $t_0=0$，$t_N=1$，

$$t_k\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{(N-K+\frac{1}{2})\pi},k=1,2,\cdots,N-1$$

$$\Rightarrow f(t_k)=\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k+\frac{1}{2})\pi},k=1,2,\cdots,N-1$$

$$\Rightarrow|f(t_k)-f(t_{k-1})|=\frac{1}{(N-k+\frac{1}{2})\pi}+\frac{1}{(N-k-\frac{1}{2})\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{2(N-k)}{(N-k)^2-\frac{1}{4}}\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{1}{N-k}$$

$$\Rightarrow V(f,P)\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{N-k}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\to\infty,N\to\infty.$$

定理 3.3.1

设 $f\in BV[a,b]$

1. $\forall x\in[a,b],V_a^b(f)=V_a^x(f)+V_x^b(f)$.
2. $x\mapsto V_a^x(f)$ 单调递增。

证明

1Step1: LHS⩽RHS

令 $V_a^a(f)=0$，不妨设 $x\in(a,b)$，P 是 (a,b) 的一个划分，

Case1: $x\in\{t_1,\cdots,t_{N-1}\}$. 设 $x=t_j$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-f(t_{k-1})|=\sum_{k=1}^{j}\cdots+\sum_{k=j+1}^{N}\cdots\leqslant V_a^x(f)+V_x^b(f)$$

Case2: $x\notin\{t_1,\cdots,t_{N_1}\}$，$\exists j\in\{1,\cdots,N-1\}$ s.t. $t_{j-1}<x<t_j$

$$\Rightarrow|f(t_j)-f(t_{j-1})|\leqslant|f(t_j)-f(x)|+|f(x)-f(t_{j-1})|$$

$$\Rightarrow V(f,p)\leqslant\sum_{k=1}^{j-1}\cdots+|f(x)-f(t_{j-1})|$$

$$+|f(t_j)-f(x)|+\sum_{k=j+1}^{N}\cdots\leqslant V_a^x(f)+V_x^b(f)$$

Step2: RHS⩽LHS

$$\forall\varepsilon>0,\exists P_1:a=t_0<t_1<\cdots<t_{N_1}=x\text{ s.t.}$$

$$\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-f(t_{k-1})|>V_a^x(f)-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists P_2:x=s_0<s_1<\cdots<s_{N_1}=n\text{ s.t.}$$

$$\sum_{j=1}^{N_2}|f(s_j)-f(s_{j-1})|>V_x^b(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $P=P_1\cup P_2$，是一个 $(a,b]$ 上的划分，并且

$$V(f,P)>V_a^x(f)+V_x^b(f)-\varepsilon$$
$$\Rightarrow V_a^b(f)>V_a^x(f)+V_x^b(f)-\varepsilon$$
$$\Rightarrow V_a^b(f)\geqslant V_a^x(f)+V_x^b(f)$$

2. $x_1<x_2\Rightarrow V_a^{x_2}(f)-V_a^{x_1}(f)=V_{x_1}^{x_2}(f)\geqslant 0.$

定理 3.3.2 (Jordan 分解定理)

任一实值有界变差函数可表为两个有界增函数之差。

证明 设 $f\in BV[a,b]$，令

$$g(x)\overset{\text{def}}{=}V_a^x(f),h(x)\overset{\text{def}}{=}V_a^x(f)-f(x)\Rightarrow f=g-h$$

只需证明 h 单调递增，设 $x_1<x_2$，则

$$h(x_1)-h(x_2)=V_{x_1}^{x_2}(f)-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant|f(x_2)-f(x_1)|-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0$$

定理 3.3.3 (单调函数微分定理)

若 f 在 $[a,b]$ 上单调递增，则

1. f 在 $[a,b]$ 上 a.e. 可微。
2. $f'\in L^1[a,b]$.
3. $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\leqslant f(b)-f(a)$.

定义 3.3.3

设 $E\subset\mathbb{R}$，称一族闭区间 $\Gamma=\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖是指

$$\forall x\in E,\inf\{|I|:I\in\Gamma,I\ni x\}=0$$

即

$$\forall x\in E,\forall\varepsilon>0,\exists I\in\Gamma\text{ with }|I|<\varepsilon\text{ s.t. }x\in I$$

定理 3.3.4 (Vitali 覆盖引理)

设 $E\subset\mathbb{R},m_*(E)<\infty,\Gamma$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖，则 $\forall\varepsilon>0,\exists I_1,\cdots,I_N\in\Gamma$ 互不相交，使得

$$m_*\left(E\backslash\bigcup_{k=1}^N I_k\right)<\varepsilon$$

证明 $m_*(E)<\infty\Rightarrow\exists G$ 开，$m(G)<\infty,E\subset G$. 不妨设 $\forall I\in\Gamma,I\subset G(\because\text{Vitali})$，令

$$\delta_0\overset{\text{def}}{=}\sup\{|I|:I\in\Gamma\}<\infty$$

取 $I_1\in\Gamma$ s.t. $I_1\cap E\neq\varnothing$，$|I_1|>\frac{\delta_0}{2}$. 如果 $E\subset I_1$，则停止，否则，令

$$\delta_1\overset{\text{def}}{=}\sup\{|I|:I\in\Gamma,I\cap I_1=\varnothing\}$$

则 $\delta_1>0$[2]，取 $I_2\in\Gamma$ s.t. $I_2\cap E\neq\varnothing,I_1\cap I_1=\varnothing,|I_2|>\frac{\delta_1}{2}$

如果 $E\subset I_1\cup I_2$，则停止，否则重复上述步骤 $\cdots$

$$\delta_k\overset{\text{def}}{=}\sup\{|I|:I\in\Gamma,I\cap\left(\bigcup_{j=1}^k I_j\right)=\varnothing\}$$

[2]这一步的证明留做习题，见第九次作业。

取 $I_{k+1}\in\Gamma$ s.t. $I_{k+1}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k}I_j\right)=\varnothing$，$|I_{k+1}|>\frac{\delta_k}{2}$，$\cdots$

如果有限次后停止（停止条件：$E\subset\bigcup_{k=1}^{N}I_k$）则满足条件，否则得到一列互不相交的 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\Gamma$ 使得 $|I_k|>\frac{\delta_{k-1}}{2},k=1,2,\cdots$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leqslant m(G)<+\infty$$

$\Rightarrow\exists N,$ s.t.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}|I_k|<\frac{\varepsilon}{5}$$

令 $A\overset{\text{def}}{=}E\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{N}I_k\right)$，下证 $m^*(A)<\varepsilon$.

设 $x\in A\Rightarrow r_x\overset{\text{def}}{=}\operatorname{dist}\left(x,\bigcup_{k=1}^{N}I_k\right)>0.$

$$\Rightarrow\exists I\in\Gamma,|I|<r_x\text{ s.t. }x\in I$$
$$\Rightarrow I\cap\left(\bigcup_{k=1}^{N}I_k\right)=\varnothing$$
$$\Rightarrow|I|<\delta_N<2|I_{N+1}|$$
$$|i_k|\to0\Rightarrow\exists k\text{ s.t. }I_k\cap I\neq\varnothing$$

（否则由 δ_k 定义，$|I|<\delta_k$，$\forall k$，而 $\delta_k<2|I_{k+1}|\to0$，矛盾）

令

$$n_0\overset{\text{def}}{=}\min\{k:I_k\cap I\neq\varnothing\}$$

则 $n_0>N$ 且 $|I|<\delta_{n_0-1}<2|I_{n_0}|$[3]，根据 $I_{n_0}\cap I\neq\varnothing$ 可得 $I\subset5I_{n_0}$[4]

特别的，有 $x\in5I_{n_0}$，由 x 的任意性可得

$$A\subset\bigcup_{k=N+1}^{\infty}5I_k$$

进而 $m_*(A)\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|5I_k|<\varepsilon.$

定义 3.3.4

设 f 在 x 附近有定义，令

$$D^+f(x)\overset{\text{def}}{=}\limsup_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{(右上 Dini 导数)}$$
$$D_+f(x)\overset{\text{def}}{=}\liminf_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{(右下 Dini 导数)}$$
$$D^-f(x)\overset{\text{def}}{=}\limsup_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{(左上 Dini 导数)}$$
$$D_-f(x)\overset{\text{def}}{=}\liminf_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{(左下 Dini 导数)}$$

推论 3.3.3

$D^+f(x)\geqslant D_+f(x),D^-f(x)\geqslant D_-f(x).$

证明 [Pf of 单调函数微分定理] 为了证明 f a.e. 可微，只需证明：除一个零集以外

$$D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)=D_-f(x)$$

[3]注意 $\delta_{n_0-1}=\sup\left\{|J|:J\in\Gamma,J\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n_0-1}I_j\right)=\varnothing\right\}$ 和 $I\cap I_{n_0-1}=\varnothing$.

[4]这里 $5I_{n_0}$ 指的是与 I_{n_0} 同心，但长度为其 5 倍的闭区间。

且有限。令

$$E_1 \overset{\text{def}}{=} \{x \in (a,b) : D^+ f(x) > D_- f(x)\}$$
$$E_2 \overset{\text{def}}{=} \{x \in (a,b) : D^- f(x) > D_+ f(x)\}$$

Claim:$m(E_1) = m(E_2) = 0$. 因此，$\forall x \in (a,b) \backslash (E_1 \cup E_2)$，

$$D^+ f(x) \leqslant D_- f(x) \leqslant D^- f(x) \leqslant D_+ f(x)$$

$\Rightarrow f'(x)$ 存在（可能为 ∞）

proof of Claim: 只证明 $m(E_1) = 0$.

$$f \nearrow \Rightarrow \text{四个 Dini 导数均} \geqslant 0$$
$$E_1 = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} \{x \in (a,b) : D^+ f(x) > r > s > D_- f(x)\} \overset{\text{def}}{=} A_{r,s}$$

下证 $m_*(A_{r,s}) = 0, \forall r, s \in \mathbb{Q}$. 简记 $A_{r,s} = A$.

假设不然，即 $m_*(A) > 0$，

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists G \text{ open s.t. } A \subset G \text{ and } m(G) < (1+\varepsilon) m_*(A)$$
$$x \in A \Rightarrow D_- f(x) < s$$
$$\Rightarrow \exists h_x^{(n)} \to 0^+, \text{s.t. } \frac{f(x - h_x^{(n)}) - f(x)}{h_x^{(n)}} < s, n = 1, 2, \cdots$$
$$\Rightarrow f(x) - f(x - h_x^{(n)}) < s \cdot h_x^{(n)}, n = 1, 2, \cdots$$

不妨假设每个 $[x - h_x^{(n)}, x] \subset G$，则

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{[x - h_x^{(n)}, x]\}_{x \in A, n \in \mathbb{N}}$$

是 A 的一个 Vitali 覆盖。

于是 $\exists \{[x_k - h_k, x_k] : k = 1, 2, \cdots, N\} \subset \Gamma$ 且互不相交，使得

$$m_* \left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{N} [x_k - h_k, x_k] \right) < \varepsilon$$

所以

$$m_* \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} [x_k - h_k, x_k] \right) \right) > m_*(A) - \varepsilon$$

而

$$\sum_{k=1}^{N} h_k \leqslant m(G) < (1+\varepsilon) m_*(A)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_k - h_k)] < s \sum_{k=1}^{N} h_k < s(1+\varepsilon) m_*(A)$$

令

$$B \overset{\text{def}}{=} A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} (x_k - h_k, x_k) \right)$$

$\forall y \in B$，$D^+ f(y) > r$. 同上，存在 $l_y^{(m)} \to 0^+$ s.t.

$$f(y + l_y^{(m)}) - f(y) > r l_y^{(m)}, m = 1, 2, \cdots$$

并且取 $l_y^{(m)}$ 充分小，使得[5]

$$[y, y + l_y^{(m)}] \subset (x_k - h_k, x_k) \text{ for some } k$$

[5]这一步，由 B 的定义，是可能的。

所以

$$\Gamma' \overset{\text{def}}{=} \{[y, y + l_y^{(m)}]\}_{y\in B, m\in\mathbb{N}}$$

是 B 的一个 Vitali 覆盖。

于是 $\exists\{[y_j, y_j + l_j] : k = 1, 2, \cdots, J\} \subset \Gamma'$ 且互不相交，使得

$$m_*\left(B \setminus \bigcup_{j=1}^{J}[y_j, y_j + l_j]\right) < \varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J}[f(y_j + l_j) - f(y_j)] &> r\sum_{j=1}^{J} l_j\\ &> r(m_*(B) - \varepsilon) > r(m_*(A) - 2\varepsilon)\end{aligned}$$

而 $f \nearrow$，$[y_j, y_j + l_j] \subset (x_k - h_k, x_k)$ for some k 且互不相交，

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sum_{j=1}^{J}[f(y_j + l_j) - f(y_j)] \leqslant \sum_{k=1}^{N}[f(x_k) - f(x_k - h_k)] < s(1+\varepsilon)m_*(A)\\ &\Rightarrow r(m_*(A) - 2\varepsilon) < s(1+\varepsilon)m_*(A)\\ &\Rightarrow rm_*(A) \leqslant sm_*(A)\\ r > s &\Rightarrow m_*(A) = 0\end{aligned}$$

此时还剩一点没有证明：$f'(x)$ 可能是 $+\infty$. 下证

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a)$$

令

$$g_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, x \in [a, b]$$

为保证 $f(x+\frac{1}{n})$ 有定义，我们把 f 延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上：

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(a) & , x \in (-\infty, a)\\ f(x) & , x \in [a, b]\\ f(b) & , x \in (b, +\infty)\end{cases}$$

$f \nearrow \Rightarrow g_n \geqslant 0$. 前面已经证明 $g_n \to f'$ a.e.

$$\begin{aligned}\text{Fatou} \Rightarrow \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \liminf_{n\to\infty} n\int_a^b \left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right]\mathrm{d}x\\ &= \liminf_{n\to\infty} n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant f(b) - f(a)\\ &\Rightarrow f' \in L^1[a, b]\\ &\Rightarrow f' \text{ a.e.有限，即} f \text{ a.e.可微}.\end{aligned}$$

推论 3.3.4

$$f \in BV[a,b] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ a.e.可微} \\ f' \in L^1[a,b] \end{cases}$$

3.3.2 绝对连续函数

问：如果 f 单调递增且连续，是否一定有：

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

答案是否定的。

例 3.5. Cantor-Lebesgue 函数

回忆 Cantor 集的构造：

$$I_{k,1} \overset{\text{def}}{=} (\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}), \cdots, I_{k,2^{k-1}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{3^k-2}{3^k}, \frac{3^k-1}{3^k}\right)$$

$$G \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{k,j}$$

称为 Cantor 开集，其在 $[0,1]$ 上的补集就是 Cantor 集。

令

$$g \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{2j-1}{2^k} \chi_{I_{k,j}}$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \sup\{g(t) : t \in [0,x) \cap G\} & , x \in (0,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

1. $f \nearrow$
2. $f(G) \overset{\text{dense}}{\subset} [0,1]$，因为

$$f(G) = \left\{\frac{2j-1}{2^k} : 1 \leqslant j \leqslant 2^{k-1}, k = 1, 2, \cdots\right\} \cup \{0, 1\}$$

3. $f \in C[0,1]$，否则由于单调函数只有跳跃间断点，与 2° 矛盾。
4. $f' = 0$ a.e. 因为 $\forall x \in G, \exists I_{k,j} \ni x$，而 $f = \frac{2j-1}{2^k}$ on $I_{k,j}$.
5. $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 0 < f(1) - f(0) = 1$.

定义 3.3.5

设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ s.t. 对于 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$，只要 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$，就有

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续。

记 $[a,b]$ 上的绝对连续函数全体为 $AC[a,b]$.

例 3.6.

C-L 函数不是绝对连续函数，见 Chapter3 Ex13 或者第九次作业。

例 3.7.

Lipschitz 连续 $\Rightarrow$ 绝对连续，即

$$\exists L>0 \text{ s.t. } |f(x)-f(x')|\leqslant L|x-x'|, \forall x,x'\in[a,b]\Rightarrow f\in AC[a,b]$$

详见 Chapter3 Ex32.

定理 3.3.5 (绝对连续函数相关性质)

1. $AC[a,b]$ 是向量空间。
2. $AC[a,b]\subset BV[a,b]$.
3. $f\in AC[a,b]\Rightarrow f$ 把 $[a,b]$ 中任何零测集映为零测集。
4. $f\in L^1[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow F\in AC[a,b]$.
5. $f\in AC[a,b]\Rightarrow x\mapsto V_a^x(f)\in AC[a,b]$ 且 $V_a^x(f)=\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t$.

证明

1. 由定义。
2. $\forall f\in AC[a,b]$，取 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$ 使得 $\forall(a_k,b_k)\subset[a,b]$ for $k=1,\cdots,N$ 且互不相交，只要 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$，就有

$$\sum_{k=1}^N|f(b_k)-f(a_k)|$$

令

$$J=\lfloor\frac{b-a}{\delta}\rfloor+1$$

$$P: a=t_0<t_1<\cdots<t_J=b, t_j=a+\frac{b-a}{J}j \text{ for } j=0,1,\cdots,J$$

$$\begin{aligned} t_j-t_{j-1}<\delta \Rightarrow & V_{t_{j-1}}^{t_j}(f)\leqslant 1 \\ \Rightarrow & V_a^b(f)=\sum_{j=1}^J V_{t_{j-1}}^{t_j}(f)\leqslant J \end{aligned}$$

3. Chapter3 Ex19.
4. 积分的连续性：$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\int_E|f|\mathrm{d}m<\varepsilon, \forall E\subset[a,b], m(E)<\delta$$

对于 $\forall(a_k,b_k)\subset[a,b]$ for $k=1,\cdots,N$ 且互不相交，如果 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$，则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)| &\leqslant \sum_{k=1}^N\int_{a_k}^{b_k}|f(t)|\mathrm{d}t \\ &=\int_{\bigsqcup_{k=1}^N(a_k,b_k)}|f|\mathrm{d}m<\varepsilon \end{aligned}$$

5. Chapter3 Ex16.

定理 3.3.6

$f\in AC[a,b]$ 且 $f'=0$ a.e. $\Rightarrow f$ 为常函数。

证明 否则，存在 $c\in(a,b]$ 使得 $f(c)\neq f(a)$，令

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}|f(c)-f(a)|$$

则存在 $\delta_0>0$ 使得 $\forall(a_j,b_j)\subset(a,c)$ for $j=1,\cdots,N$ 且互不相交，只要 $\sum_{j=1}^N(b_j-a_j)<\delta_0$，就有

$$\sum_{j=1}^n|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon_0$$

令

$$E=\{x\in(a,c):f'(x)=0\}$$

$\forall x\in E$，

$$\begin{aligned}
&\overset{f'(x)=0}{\Rightarrow}\forall\eta>0,\exists h_x^{(k)}>0\text{ with }[x,x+h_x^{(k)}]\subset(a,c)\text{ s.t. }|f(x+h_x^{(k)})-f(x)|<\eta h_x^{(k)},k=1,2,\cdots\\
&\Rightarrow\Gamma=\{[x,x+h_x^{(k)}]\}_{x\in E,k\in\mathbb{N}}\text{是 }E\text{ 的 Vitali 覆盖}\\
&\overset{\text{Vitali}}{\Rightarrow}\exists\text{ disjoint }[x_1,x_1+h_1],\cdots,[x_N,x_N+h_N]\in\Gamma\text{ s.t.}\\
&\quad m\left((a,c)\backslash\bigcup_{k=1}^N[x_k,x_k+h_k]\right)=m\left(E\backslash\bigcup_{k=1}^N[x_k,x_k+h_k]\right)<\delta_0
\end{aligned}$$

不妨将这些区间依次排列：

$$(a,c)\backslash\bigcup_{k=1}^N[x_k,x_k+h_k]=(x_0,x_1)\cup\cdots\cup(x_N+h_N,x_{N+1})$$
$$a=x_0<x_1<x_1+h_1<\cdots<x_N+h_N<x_{N+1}=c$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\sum_{k=1}^N[x_{k+1}-(x_k+h_k)]<\delta_0\\
&\overset{AC}{\Rightarrow}\sum_{k=0}^N|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)|<\varepsilon_0\\
&\Rightarrow 3\varepsilon_0=|f(c)-f(a)|\\
&\quad\leqslant\sum_{k=0}^N|f(x_{k+1}-f(x_k+h_k))|+\sum_{k=1}^N|f(x_k+h_k)-f(x_k)|\\
&\quad<\varepsilon_0+\eta\sum_{k=1}^N h_k<\varepsilon_0+(b-a)\eta\\
&\overset{\text{let }(b-a)\eta<\varepsilon_0}{\Rightarrow}3\varepsilon_0<2\varepsilon_0
\end{aligned}$$

矛盾。

定理 3.3.7

1. $F\in AC[a,b]\Rightarrow F$ a.e. 可微，$F'\in L^1[a,b]$ 且
$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$$
2. $f\in L^1[a,b]\Rightarrow\exists F\in AC[a,b]$ s.t. $F'=f$ a.e. 事实上取
$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

即满足条件。

证明 对于 1°，

$$F \in AC[a,b] \Rightarrow F \text{ a.e.可微且} F' \in L^1[a,b]$$

令

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$$

由 LDT 得 $G' = F'$ a.e. 由定理 3.3.5.4° 可知 $G \in AC[a,b]$，所以 $F - G \in AC[a,b]$，又因为 $(F-G)' = 0$ a.e.，由定理 3.3.6 可知 $F - G$ 为常数，设

$$C = F(x) - \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$$

取 $x = a$ 可得 $C = F(a)$，所以

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

对于 2°，利用 LDT 和定理 3.3.5.4° 即可。

注 这条定理表明，N-L 公式成立 $\Leftrightarrow F \in AC[a,b]$.

问：弧长公式：

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

对于 a.e. 可微曲线是否成立？答案是否定的。

例 3.8.

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$，$t \mapsto (F(t), F(t))$. 其中 F 是 C-L 函数，F 连续单调增且是 $[0,1] \to [0,1]$ 上的满射，$L(\gamma) = \sqrt{2}$，但

$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = 0$$

定理 3.3.8

γ 是 AC 曲线 $\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$.

证明 令

$$f(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), t \in [a,b]$$

γ 可求长当且仅当 $f \in BV[a,b]$，且

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= \sup_P \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k_1})| \\ &= \sup_P \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

约化为证明：

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$$

对于 $[a,b]$ 得任一划分 P，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以 $V_a^b(f)\leqslant\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t$.

$\forall\varepsilon>0$，存在阶梯函数 ψ 使得

$$||f'-\psi||_1<\varepsilon$$

令

$$g(x)=\int_a^x\psi(t)\mathrm{d}t$$

$$h(x)=\int_a^x[f'(t)-\psi(t)]\mathrm{d}t$$

所以 $f=g+h+f(a)$，进而

$$V_a^b(f)\geqslant V_a^b(g)-V_a^b(h)$$

由 LDT 可得 $h'=f'-\psi$. 所以

$$V_a^b(h)\leqslant\int_a^b|h'(t)|\mathrm{d}t=||f'-\psi||_1<\varepsilon$$

所以

$$V_a^b(f)\geqslant V_a^b(g)-\varepsilon$$

设 $\psi=\sum_{k=1}^n c_k\chi_{[t_{k-1},t_k)}$，

$$\begin{aligned}V_a^b(g)&\geqslant\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\psi(t)\mathrm{d}t\right|\\ &=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\psi(t)|\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b|\psi(t)|\mathrm{d}t\\ &=||\psi||_1\geqslant||f'||_1-\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$V_a^b(f)\geqslant||f'||_1-2\varepsilon\Rightarrow V_a^b(f)\geqslant||f'||_1$$

第 4 章 抽象测度论

通过定义处理抽象对象，这些对象不必满足所要建立的理论的那些要求之外的任何条件，将这些特征性质自身作为研究的主要对象对待。
我们的意图是使用上述公理化方法处理测度和积分理论。

——C.Caratheodory, 1918

4.1 基本概念

定义 4.1.1

如果集合族 $\mathcal{A} \subset 2^X$ 满足：

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
2. $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.
3. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c\mathcal{A}$.

则称 $\mathcal{A}$ 是 X 上的一个代数。

把 (2) 换成可列并，就是 σ-代数的定义。如果 m 是 X 上的一个 σ-代数，则 (X, m) 称为一个可测空间，m 中的元素称为可测集。

定义 4.1.2

设 $\mathcal{F} \subset 2^X$，定义

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{m \supset \mathcal{F}} m$$

即包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数，称为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数。

注 复习定义 1.1.5：Borel σ-代数是 $\mathbb{R}^n$ 上全体开集生成的 σ-代数。

定义 4.1.3

(X, m) 是一个可测空间，如果有函数 $\mu : m \to [0, +\infty]$ 满足：

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. 可数可加性：$E_{k}{}_{k=1}^{\infty} \subset m$ 且互不相交，则

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

则称 μ 是 (X, m) 上的一个测度，(X, m, μ) 称为测度空间。

如果 $\mu(X) < \infty$，则称 μ 是有限测度。特别地，如果 $\mu(X) = 1$，则称 μ 是一个概率测度。(X, m, μ) 称为一个概率空间。

例 4.1.

1. $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度。
2. Dirac 测度：

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & , E \ni a \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

3. 计数测度：

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & , \#E < \infty \\ +\infty & , \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 4.1.1

设 μ 是 (X, m) 上的一个测度，$\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset m$，则满足：

1. 单调性：$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$.
2. 次可加性：$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.
3. 连续性：向上：

$$E_k \nearrow E \Rightarrow \mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

向下：

$$E_k \searrow E, \mu(E_1) < \infty \Rightarrow \mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

定义 4.1.4

(X, m, μ) 上，如果 $E \in m$，$\mu(E) = 0$，则称 E 是一个 μ-零集。

例 4.2.

$\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 是 δ_0-零集。

定义 4.1.5

(X, m, μ) 上，如果一个性质，对于除了一个 μ-零集以外的所有 $x \in X$ 都成立，则称它几乎处处成立，记作 μ-a.e.

定义 4.1.6

称 (X, m, μ) 是完备的，如果 μ-零集的任何子集都可测。即 μ-零集的任何子集还在 X 的子集族 m 当中。

例 4.3.

$\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度 m 完备，但 Borel 集 $\mathcal{B}$ 上的 Lebesgue 测度 m 不完备。如果完备，由 Lebesgue 可测集的构造可得 $\mathcal{B}=\mathcal{L}$，而我们在之前的习题里得出的结论是 $\mathcal{B}\subsetneq\mathcal{L}$.

定义 4.1.7

可测空间 (X,m) 上，如果 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ 满足

$$\forall a\in\mathbb{R},\{f>a\}\in m$$

则称 f 可测。对于复值函数，如果 $\mathrm{Re}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 都可测，则称 f 可测。

推论 4.1.1

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可测，则 $\sup\limits_n f_n$，$\inf\limits_n f_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$，$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 都可测。

进而可测函数全体对于极限运算封闭。

定义 4.1.8

X 上全体非负可测函数记作 $L^+(X)$.

定义 4.1.9

简单函数定义为可测集示性函数的线性组合。

定理 4.1.2

$\forall f\in L^+(X)$，$\exists$ simple $\varphi_k\geqslant 0$ s.t. $\varphi_k\nearrow f$.

证明 和定理 1.3.11 的证明非常类似，对于

$$k=0,1,2,\cdots$$

$$j=0,1,2,\cdots,2^{2k}-1$$

令

$$E_{k,j}=\left\{\frac{j}{2^k}<f\leqslant\frac{j+1}{2^k}\right\}$$
$$F_k=\{f>2^k\}$$

$$\varphi_k=\sum_{j=1}^{2^{2k}-1}\frac{j}{2^k}\chi_{E_{k,j}}+2^k\chi_{F_k}$$

定义 4.1.10

(X,m,μ) 上，

1. 对于非负简单函数有标准表示：$\varphi=\sum_{j=1}^{N}c_k\chi_{E_k}$，定义积分

$$\int_X\varphi\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{N}c_k\mu(E_k)$$

2. 对于 $f\in L^+(X)$，定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_X\varphi\mathrm{d}\mu:\varphi\text{ simple },0\leqslant\varphi\leqslant f\right\}$$

称为 f 在 X 上关于 μ 的积分。

3. 对于可测函数 $f:X\to[-\infty,+\infty]$，如果 $\int_X f^+\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_X f^-\mathrm{d}\mu$ 中至少有一个有限，则定义

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\mathrm{d}\mu$$

如果都有限，则称 f 在 X 上可积。X 上全体可积函数记作 $L^1(X,\mu)$.

4. 设 $E\in m$，f 在 E 上可测，令

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\chi_E\mathrm{d}\mu$$

推论 4.1.2 (线性)

$\forall f,g\in L^1(X,\mu)$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，

$$\int_X(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu=\alpha\int_X f\mathrm{d}\mu+\beta\int_X g\mathrm{d}\mu$$

定理 4.1.3 (MCT)

$L^+(X)\ni f_k\nearrow f$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}u$$

定理 4.1.4 (Fatou)

对于 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L^+(X)$，

$$\int_X\liminf_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}\mu\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_X f_k\mathrm{d}\mu$$

定理 4.1.5 (DCT)

设 f_k 是一列可测函数，$f_k\to f$ a.e. 如果 $\exists g\in L^1(X,\mu)$ s.t.

$$|f_k|\leqslant g\text{ a.e. }\forall\text{k}$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}u$$

例 4.4.

对于 $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$，其中 μ 是计数测度，对于函数：$f:\mathbb{N}\to[0,+\infty)$，则

$$\int_{\mathbb{N}}f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$$

因为

$$f\chi_{\{k\}}=f(k)\chi_{\{k\}}\text{ simple}$$
$$\int_{\mathbb{N}}f\chi_{\{k\}}\mathrm{d}\mu=f(k)\mu(\{k\})=f(k)$$
$$\Rightarrow\int_{\mathbb{N}}f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{k\}}f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$$

因此

$$f \in L^1(\mathbb{N}, \mu) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty$$

例 4.5.

$(X, 2^X, \delta_a)$ 上，

$$\forall f : X \to \mathbb{R}, \int_X f \mathrm{d}\mu = f(a)$$

定义 4.1.11

X 是非空集合，如果函数 $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ 满足

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$
2. 单调性：$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$.
3. 可数可加性：互不相交的一列集合 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$，有

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

则称 μ^* 是 X 上的一个外测度。

定义 4.1.12

设 μ^* 是 X 上的一个外测度，如果 $E \subset X$ 满足：$\forall A \subset X$，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

则称 E 是 μ^*-可测的。

定理 4.1.6 (Caratheodory)

X 上的全体 μ^*-可测集 m 是 X 上的 σ-代数，而且 $\mu \overset{\text{def}}{=} \mu^*|_m$ 是一个完备的测度。

证明 第一步：m 是代数。只需证明 m 对有限并封闭，设 $E_1, E_2 \in m$，我们希望证明：$\forall A \subset X$，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

左式小于等于右式是显然的，而

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\
&= \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&\geqslant \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)
\end{aligned}$$

第二步：$\mu^*|_m$ 满足有限可加性。设 $E_1, E_2 \in m$，$E_1 \cap E_2 = \varnothing$，

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) = \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$$

第三步：m 是 σ-代数。设互不相交的 $E_k \in m, k = 1, 2, \cdots$ 不妨设互不相交，否则令

$$\tilde{E}_1 = E_1, \tilde{E}_k = E_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j, k \geqslant 2$$

Claim:

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k), \forall A \subset X, \forall n \in \mathbb{N}$$

归纳，显然上式对 $n=1$ 成立，如果对 n 成立，那么

$$\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}E_k\right)\right)=\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)\cap E_{N+1}\right)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)\cap E_{N+1}^c\right)$$
$$=\mu^*(A\cap E_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\mu^*(A\cap E_k)$$

令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，对于 $\forall A\subset X$，$\forall n$

$$\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*(A\cap E^c)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)^c\right)$$
$$=\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)\right)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)^c\right)$$
$$=\mu^*(A)$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*(A\cap E^c)\leqslant\mu^*(A)\tag{1}$$

另一方面：

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k)^*_\mu(A\cap E^c)\tag{2}$$
$$(1)+(2)\Rightarrow\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$
$$\Rightarrow E\in m$$

第四步：令 $\mu=\mu^*|_m$，证明其满足可数可加性，从而是一个测度。设 $E_k\in m,k=1,2,\cdots$ 互不相交，令

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

由第三步中的 $(1)+(2)$，

$$\mu^*(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_k)+\mu^*(A\cap E^c),\forall A\subset X$$

取 $A=E$，

$$\mu^*(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k)$$

第五步：μ 完备。只需证：$\forall E$ with $\mu^*(E)=0\Rightarrow E\in m$. 由于 $\forall A\subset X$，

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)\leqslant\mu^*(A)$$

$\Rightarrow E\in m$.

定义 4.1.13

$\mathcal{A}$ 是 X 上的代数，如果 $\mu_o:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ 满足：

1. $\mu_o(\varnothing)=0$.
2. $\mathcal{A}$ 上一列集合 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 互不相交的，且 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{A}$，则

$$\mu_o\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_o(A_k)$$

则称 μ_o 是 X 上的一个预测度。

注 (2) $\Rightarrow$ 单调性、有限可加性。

定义 4.1.14

(X, m, μ) 上，如果

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ with } \mu(E_k) > \infty, \forall k$$

则称 μ 是 σ-有限测度。

定理 4.1.7

$\mathcal{A}$ 是 X 上的代数，μ_o 是 X 上的一个预测度，对于 $E \subset X$，令

$$\mu^*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k) : \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

则：

1. μ^* 是 X 上的外测度。
2. $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_o$.
3. $\mathcal{A} \subset m \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$.
4. $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu^*|_m$ 是一个测度，若 v 是 m 上另一测度使得 $v|\mathcal{A} = \mu_o$，则 $v < \mu$. 而且若 $\mu(E) < \infty$，则 $v(E) = \mu(E)$. 特别地，如果 μ_o 是 σ-有限测度，则 $v = \mu$.（即 μ 是 μ_o 从 $\mathcal{A}$ 到 m 上的唯一延拓。）

证明

1. 只验证可数可加性，设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset 2^X$，不妨设

$$\mu^*(E) < \infty, \forall k.$$

$\forall \varepsilon > 0$，对于每个 E_k，存在 $A_j^{(k)} \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \cdots$ 使得 $E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)}$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_o(A_j^{(k)}) < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &\leqslant \sum_{k,j} \mu_o(A_j^{(k)}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_o(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon \\ \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) \end{aligned}$$

2. 设 $E \in \mathcal{A}$，则

$$\mu^*(E) \leqslant \mu_o(E)$$

另一方面，$\forall A_k \in \mathcal{A}, k = 1, 2, \cdots$ with $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，令

$$E_1 = E \cap A_1$$

$$E_k = E \cap \left(A_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right), k \geqslant 2$$

$\Rightarrow E_k \in \mathcal{A}, k=1,2,\cdots$ 互不相交，且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mu_o(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k)$$

$$\Rightarrow \mu_o(E) \leqslant \mu^*(E)$$

3. 设 $A \in \mathcal{A}$，希望证明 $A \in m$，即

$$\forall E \subset X, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

$\forall \varepsilon > 0$，存在 $A_k \in \mathcal{A}, k=1,2,\cdots$ 使得 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(E) &\leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&\leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap A)\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap A)^c\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [\mu^*(A_k \cap A) + \mu^*(A_k \cap A^c)] \\
&\overset{\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu_o}{=} \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_o(A_k \cap A) + \mu_o(A_k \cap A)] \\
&\overset{\mu_o\text{有限可加}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k) < \mu^*(E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

4. 设 $E \in m$，$\forall A_k \in \mathcal{A}, k=1,2,\cdots$ with $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$v(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k)$$

$$\Rightarrow v(E) \leqslant \mu^*(E) = \mu(E)$$

设 $\mu(E) < \infty$，来证明反向不等式：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists A_k \in \mathcal{A}, k=1,2,\cdots$ s.t. $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k) < \mu(E) + \varepsilon$$

令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_o(A_k) < \mu(E) + \varepsilon \\
&\Rightarrow \mu(A \backslash E) = \mu(A) - \mu(E) < \varepsilon \\
&\Rightarrow v(A) = \lim_{N \to \infty} v\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \lim_{N \to \infty} \mu_o\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \mu(A) \\
&\Rightarrow \mu(E) \leqslant \mu(A) = v(A) = v(E) + v(A \backslash E) \leqslant v(E) + \mu(A \backslash E) \leqslant v(E) + \varepsilon \\
&\Rightarrow \mu(E) \leqslant v(E)
\end{aligned}$$

若 μ_o 是 σ-有限的，

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ with } \mu_o(A_k) < \infty, \forall k$$

$$\forall E \in m, v(E) = \sum_{k=1}^{\infty} v(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k) = \mu(E)$$

定义 4.1.15

如果 $\mathcal{F} \subset 2^X$ 满足：

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. 对有限交封闭。
3. $\forall E \in \mathcal{F}, \exists \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ s.t. $E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个半代数。

例 4.6.

$\mathbb{R}$ 上区间全体是一个半代数。

推论 4.1.3

$\mathcal{F}$ 是 X 上的一个半代数，$\mathcal{A} = \{\mathcal{F}$ 中成员的有限不交并 $\}$ 是 X 上的代数。

证明 设 $A, B \in \mathcal{F}$，

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B^c = \bigsqcup_{k=1}^{N} C_k \text{ with } C_k \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow A \backslash B = \bigsqcup_{k=1}^{N} (A \cap C_k) \in \mathcal{A} \\
&\Rightarrow A \cup B = (A \backslash B) \cup B = \bigsqcup_{k=1}^{N} (A \cap C_k) \cup B \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

由此，结合 $\mathcal{A}$ 的定义可见其对有限并封闭。

$$\begin{aligned}
\forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow E &= \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k \text{ with } A_k \in \mathcal{F} \\
A_k^c &= \bigsqcup_{j=1}^{N_k} C_j^{(k)} \text{ with } C_j^{(k)} \in \mathcal{F} \\
\Rightarrow E^c &= \bigcap_{k=1}^{N} A_k^c = \bigcap_{k=1}^{N} \left(\bigcup_{j=1}^{N_k} C_j^{(k)} \right) \\
&= \bigcup_{1 \leqslant j_k \leqslant N_k, 1 \leqslant k \leqslant N} C_{j_1}^{(1)} \cap \cdots \cap C_{j_N}^{(N)} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

4.2 乘积测度与 Fubini 定理

问：如果有两个测度空间 (X_1, m_1, μ_1) 和 (X_2, m_2, μ_2)，那么是否有乘积测度空间：

$$(X_1 \times X_2, m_1 \otimes m_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

定义 4.2.1

一般来说 $m_1 \times m_2 = \{A \times B : A \in m_1, B \in m_2\}$ 不是 σ-代数。我们把这里的 $A \times B$ 叫做可测矩形。定义

$$m_1 \otimes m_2 = \sigma(m_1 \times m_2)$$

即 $m_1 \times m_2$ 生成的 σ-代数。

问：如何定义 $\mu_1 \times \mu_2$ 使得 Fubini Thm 成立？一个必要条件是：

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

推论 4.2.1

$m_1 \times m_2$ 是半代数。

证明

$$(A_1 \times B_2) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

$$(A \times B)^c = (X_1 \times B^c) \cup (A^c \times B)$$

定义 4.2.2

$\mathcal{A} = \{$可测矩形的有限不交并$\}$，则是一个 $X_1 \times X_2$ 上的一个代数。

令

$$\mu_o\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(A_k \times B_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\mu_1(A_k)\mu_2(B_k)$$

则 μ_o 是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度。

对于 $E \subset X_1 \times X_2$，定义

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_o(E_k) : E_k \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}$$

则 μ^* 是 $X_1 \times X_2$ 上的一个外测度。

定义

$$m = \{\mu^*\text{-可测集}\}$$

$$\mu = \mu^*|_m$$

于是 μ 是一个完备测度，且 $m_1 \otimes m_2 \subset m$.

最后定义 $\mu_1 \times \mu_2 = \mu^*|_{m_1 \otimes m_2}$.

注 一般来说，$\mu_1 \times \mu_2$ 不完备，除非 $m_1 \otimes m_2 = m$.

定义 4.2.3

乘积测度空间 $(X_1 \times X_2, m_1 \otimes m_2, \mu_1 \times \mu_2)$ 上，设 $E \subset X_1 \times X_2$，对于 $x \in X_1$，

$$E_x \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_2 : (x,y) \in E\}$$

称为 E 的 x 切片；类似定义

$$E^y \overset{\text{def}}{=} \{x \in X_1 : (x,y) \in E\}$$

对于 $f : X_1 \times X_2 \to [-\infty, +\infty]$，

$$f_x(y) \overset{\text{def}}{=} f(x,y), f^y(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,y)$$

定理 4.2.1

1. 设 $E \in m_1 \otimes m_2$，则 $\forall x \in X_1, y \in X_2$，都有 $E_x \in m_2, E^y \in m_1$.
2. f $m_1 \otimes m_2$ 可测 $\Rightarrow$ f_x m_2 可测，f^y m_1 可测

定理 4.2.2 (Tonelli)

设 (X_1, m_1, μ_1)，(X_2, m_2, μ_2) 都是 σ-有限的，$f \in L^+(X_1 \times X_2)$.

1. $x \mapsto \int_{X_2} f_x \mathrm{d}\mu_2 \in L^+(X_1)$，$y \mapsto \int_{X_1} f^y \mathrm{d}\mu_1 \in L^+(X_2)$.
2. $\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \left[\int_{X_2} f(x,y)\mathrm{d}\mu_2(y)\right] \mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{X_2} \left[\int_{X_1} f(x,y)\mathrm{d}\mu_1(x)\right] \mathrm{d}\mu_2(y)$

定理 4.2.3 (Fubini)

设 (X_1, m_1, μ_1)，(X_2, m_2, μ_2) 都是 σ-有限的，$f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

1. $f_x \in L^1(X_2, \mu_2)$ for μ_1-a.e. $x \in X_1$，$f^y \in L^1(X_1, \mu_1)$ for μ_2-a.e. $y \in X_2$.
2. $x \mapsto \int_{X_2} f_x \mathrm{d}\mu_2 \in L^1(X_1, \mu_1)$，$y \mapsto \int_{X_1} f^y \mathrm{d}\mu_1 \in L^1(X_2, \mu_2)$
3. 同 Tonelli 第二条。

证明与 Lebesgue 测度下的相关定理类似，不再赘述。

定理 4.2.4

设 (X_1, m_1, μ_1)，(X_2, m_2, μ_2) 都是 σ-有限的，$E \in m_1 \otimes m_2$.

1. $x \mapsto \mu_2(E_x)$ m_1-可测，$y \mapsto \mu_1(E^y)$ m_2-可测。
2. $(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_x)\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(E^y)\mathrm{d}\mu_2$

要证明这个定理，我们先引入单调类这个概念。

定义 4.2.4

如果 $\mathcal{F} \subset 2^X$ 满足：

$$\mathcal{F} \ni E_k \nearrow E \Rightarrow E \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \ni E_k \searrow E \Rightarrow E \in \mathcal{F}$$

则称 $\mathcal{F}$ 是一个单调类。

例 4.7.

σ-代数就是一个单调类。

定理 4.2.5 (单调类引理，Monotone Class Lemma，MCL)

$\mathcal{A}$ 是 X 上的代数，$\mathcal{A}$ 生成的单调类，就是 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数。

证明 令

$$m \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}\text{生成的单调类}$$

于是 $\mathcal{F} \subset m$，因为 σ-代数是单调类。所以只需证明 $\mathcal{F}$ 是 σ-代数。

对于 $E \in \mathcal{F}$，令

$$\mathcal{F}_E \overset{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F} : E \backslash F, F \backslash E, E \cap F \in \mathcal{F}\}$$

1. $\varnothing, E \in \mathcal{F}_E$.
2. $E \in \mathcal{F}_F \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_E$.
3. $\mathcal{F}_E$ 是单调类。
4. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{F}_E$，因为

$$\forall F \in \mathcal{A}, E \backslash F, F \backslash E, E \cap F \in \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$$

5. $E\in\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_E$，因为

$$4^\circ\mathcal{A}\subset\mathcal{F}_E\overset{3^\circ}{\Rightarrow}\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_E$$

6.

$$\begin{aligned}&E\in\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_E\\&E\in\mathcal{F}\overset{5^\circ}{\Rightarrow}E\in\mathcal{F}_A,\forall A\in\mathcal{A}\\&\qquad\overset{2^\circ}{\Rightarrow}A\in\mathcal{F}_E,\forall A\in\mathcal{A}\\&\qquad\Leftrightarrow\mathcal{A}\subset\mathcal{F}_E\\&\qquad\overset{3^\circ}{\Rightarrow}\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_E\end{aligned}$$

7. $\mathcal{F}$ 是代数，因为 $\forall E,F\in\mathcal{F}\overset{6^\circ}{\Rightarrow}E\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_F\Rightarrow E\backslash F,E\cap F\in\mathcal{F}$.

8. $\mathcal{F}$ 是 σ-代数。设 $A_k\in\mathcal{F},k=1,2,\cdots$，令

$$\begin{aligned}&A\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,B_n\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{k=1}^{n}A_k\\&\overset{7^\circ}{\Rightarrow}B_n\in\mathcal{F}\overset{B_n\nearrow A}{\Rightarrow}A\in\mathcal{F}\end{aligned}$$

证明 [Pf of Thm 4.2.4] 假设 μ_1,μ_2 都是有限测度，令

$$\mathcal{F}\overset{\text{def}}{=}\{E\in m_1\otimes m_2:E\text{ satisfy }1^\circ,2^\circ\}$$

Claim：$\mathcal{F}=m_1\otimes m_2$.

先证明 $m_1\times m_2\subset\mathcal{F}$，设 $E=A\times B,A\in m_1,B\in m_2$，则

$$E_x=\begin{cases}B&,x\in A\\\varnothing&,x\notin A\end{cases},E^y=\begin{cases}A&,y\in B\\\varnothing&,y\notin B\end{cases}$$

于是

$$\mu_2(E_x)=\mu_2(B)\chi_A(x),\mu_1(E^y)=\mu_1(A)\chi_B(y)$$

则 1° 成立，而

$$\begin{aligned}\int_{X_1}\mu_2(E_x)\mathrm{d}\mu_1(x)&=\mu_2(B)\int_{X_1}\chi_A\mathrm{d}\mu_1\\&=\mu_2(B)\mu_1(A)\\&=(\mu_1\times\mu_2)(E)\end{aligned}$$

同理，$(\mu_1\times\mu_2)(E)=\int_{X_2}\mu_1(E^y)\mathrm{d}\mu_2(y)$，所以 2° 成立，于是 $m_1\times m_2\subset\mathcal{F}$.

然后我们希望证明 $\mathcal{F}$ 是一个单调类，然后由单调类引理即可得到 $\mathcal{F}\subset m_1\times m_2$. 令

$$\mathcal{A}\overset{\text{def}}{=}\{m_1\times m_2\text{中成员的有限不交并}\}$$

由 $m_1\times m_2\subset\mathcal{F}$ 和可加性得到 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$，且 $\mathcal{A}$ 是 $X_1\times X_2$ 上的代数。设 $\mathcal{F}\ni E_k\nearrow E$，令

$$\begin{aligned}&f_k(y)\overset{\text{def}}{=}\mu_1((E_k)^y),y\in X_2\\&\overset{E_k\in\mathcal{F}}{\Rightarrow}f_k\ m_2\text{可测}\\E_k\nearrow E\Rightarrow&(E_k)^y\nearrow E^y\\&\Rightarrow f(y)\overset{\text{def}}{=}\mu_1(E^y)=\lim_{k\to\infty}\mu_1((E_k)^y)\\&\Rightarrow f\ m_2\text{可测且}f_k\nearrow f\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{X_2} \mu_1(E^y)\mathrm{d}\mu_2(y) &= \int_{X_2} f(y)\mathrm{d}\mu_2(y) \\
&\overset{\text{MCT}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{X_2} f_k(y)\mathrm{d}\mu_2(y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X_2} \mu_1((E_k)^y)\mathrm{d}\mu_2(y) \\
&\overset{E_k\in\mathcal{F}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_1\times\mu_2(E_k) = \mu_1\times\mu_2(E) \qquad \text{（测度的上连续性）}
\end{aligned}$$

所以 $E\in\mathcal{F}$，关于 $\mathcal{F}\ni E_k\searrow E\Rightarrow E\in\mathcal{F}$ 的证明是完全类似的，只是在最后一步要利用测度的下连续性，μ_1,μ_2 都是有限测度保证了这一点。

最后我们来看一下一般情形，即 μ_1 和 μ_2 不都是有限测度。因为 X_1 和 X_2 是 σ-有限的：

$$X_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ with } \mu(A_k)<\infty, A_k\nearrow X_1$$

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \text{ with } \mu(B_k)<\infty, B_k\nearrow X_2$$

所以 $X_1\times X_2=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\times B_k)$. 因为 $m_1\cap A_k$ 是 A_k 上的 σ-代数，定义

$$\mu_1^k \overset{\text{def}}{=} \mu_1|_{m_1\cap A_k}$$

类似地定义

$$\mu_2^k \overset{\text{def}}{=} \mu_2|_{m_2\cap B_k}$$

都是有限测度，对于 $E\in m_1\otimes m_2$，

$$(E\cap(A_k\times B_k))^y = \begin{cases} E^y\cap A_k & ,y\in B_k \\ \varnothing & ,y\notin B_k \end{cases}$$

于是当 $k\to\infty$，

$$\begin{aligned}
&\mu_1\times\mu_2(E\cap(A_k\times B_k)) \to (\mu_1\times\mu_2)(E) \qquad \text{（测度的上连续性）}\\
= &\int_{X_2} \mu_1(E^y\cap A_k)\chi_{B_k}(y)\mathrm{d}\mu_2(y) \to \int_{X_2}\mu_1(E^y)\mathrm{d}\mu_2(y) \qquad \text{（MCT）}
\end{aligned}$$

例 4.8.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

由 Riemann 重排定理，上式一般来说不成立，那么何时成立？留做习题。

第二部分
相关习题

第 2 部分目录

第 5 章 课本部分习题

建议大家先做题，再听课，要在游泳中学会游泳。

———刘聪文老师，2023 春季学期实分析第一节课

5.1 Measure Theory

题目 1. 证明康托集 $\mathcal{C}$ 是完全不连通的和完备的。换言之，任给 $\mathcal{C}$ 内两个不同的点 $x,y\in\mathcal{C}$，存在另一个点 $z\notin\mathcal{C}$ 夹在 x 和 y 之间，同时 $\mathcal{C}$ 没有孤立点。

提示：如果 $x,y\in\mathcal{C}$ 满足 $|x-y|>\frac{1}{3^k}$，那么在 C_k 上，x 和 y 属于两个不同的区间。此外，任意给定的 $x\in\mathcal{C}$，C_k 一定存在某个区间端点 y_k 满足 $x\neq y_k$ 和 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3^k}$.

解答： $\mathcal{C}$ 完全不连通：任取 $x,y\in\mathcal{C}$，存在足够大的 k，使得 $|x-y|>\frac{1}{3^k}$，因为 C_k 是若干长度为 $\frac{1}{3^k}$ 的区间的并，所以 x 和 y 属于两个不同的区间，因此中间一定不连通。

$\mathcal{C}$ 是完备的：即没有孤立点。任取给定的 $x\in\mathcal{C}$，对于 $\forall\varepsilon>0$，都存在充分大的 k 使得 $\varepsilon\geqslant\frac{1}{3^k}$. 同时，$x$ 肯定属于 C_k 上的某个区间，那么取这个区间的端点 y_k，就有 $y_k\in\mathcal{C}$ 且 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3^k}\leqslant\varepsilon$.[1] 所以 x 不是孤立点，因为总有和它足够接近的点 y_k.

题目 2. 康托集也可以从三进制的角度来描述。

1. $[0,1]$ 上的每个数字都有三进制展开：

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k3^{-k},a_k\in\{0,1,2\}$$

注意，这一分解不是唯一的。例如 $\frac{1}{3}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3^k}$.

证明：$x\in\mathcal{C}$ 当且仅当 x 三进制展开后，所有的系数 a_k 都是 0 或者 2.

[1]这一步利用了两个事实：C_k 的区间端点一定在 $\mathcal{C}$ 内、C_k 的每个区间长度为 $\frac{1}{3^k}$.

2. 康托-勒贝格函数[2]定义在 $\mathcal{C}$ 上，满足
$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k}, x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k3^{-k}, b_k=\frac{a_k}{2}$$
证明：$F(x)$ 是良定的，且在 $\mathcal{C}$ 上连续，且有 $F(0)=0, F(1)=1$.
3. 证明 $F:[0,1]\to\mathcal{C}$ 是满射。换言之，$\forall y\in[0,1], \exists x\in\mathcal{C}$ s.t. $F(x)=y$.
4. 有一种能够把 F 扩展为 $[0,1]$ 上连续函数的方法：注意到如果 (a,b) 是组成 $G=[0,1]\backslash\mathcal{C}$ 的开区间之一，那么 $F(a)=F(b)$，于是我们定义 $F(x)=F(a)$ on (a,b).

解答：

1. 对于那些展开不唯一的数字，例如 $\frac{1}{3}$，我们不妨只考虑它的无限展开式。回忆康托集的构造过程可以发现，第 n 次迭代中去掉的数字，正是三进制展开式中 $a_n=1$ 的那些数字，因为每次去除的都是“中间的三分之一”。[3]
2. 验证良定：也就是验证一个数有没有可能对应了多个值，我们只需要考虑那些三进制展开式不唯一的数字：
$$a_n=1, a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0 \text{ or } a_n=0, a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=2$$
对应了
$$b_n=\frac{1}{2}, b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=0 \text{ or } b_n=0, b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=1$$
不难验证两种情况下的 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 是相等的。
连续性：设 $x_1,x_2\in\mathcal{C}$，并且
$$x_1=\sum_{k=1}^{\infty}a_k3^{-k}, x_2=\sum_{k=1}^{\infty}a'_k3^{-k}$$
对于 $\forall\varepsilon>0$，存在充分大的 k 使得 $\varepsilon\geqslant\frac{1}{2^{k-1}}$，令 $\delta=\frac{1}{3^k}$，并且 $|x_1-x_2|<\delta$，那么 a_n 和 a'_n 的前 k 项完全相同，于是
$$\begin{aligned}|F(x_1)-F(x_2)|&=\frac{a_{k+1}-a'_{k+1}}{2^{k+1}}+\frac{a_{k+2}-a'_{k+2}}{2^{k+2}}+\cdots\\&\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots=\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$
从而连续性得证。
由
$$0=\sum_{k=1}^{\infty}0\cdot3^{-k}, 1=\sum_{k=1}^{\infty}2\cdot3^{-k}$$
可得
$$F(0)=0, F(1)=\sum_{k=1}^{\infty}1\cdot2^{-k}=1.$$
3. 考虑 $y\in[0,1]$ 的二进制展开
$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k}, b_k\in\{0,1\}$$
那么取
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2b_k}{3^k}$$
即可。不难注意到 x 的三进制展开系数是 0 或者 2，所以 $x\in\mathcal{C}$.
4. 首先来说明 $F(a)=F(b)$，根据康托集的构造过程，(a,b) 就是某次去掉的开区间，假设是第 k 次迭代去掉

[3]值得一提的是，C_n 的某个区间端点的有限三进制展开中 $a_n=1$，之后的项都是 0，所以我们才规定只考虑它的无限展开式：$a_n=0$，之后的项全是 2. 如此一来就保证了第 n 次迭代中被去掉的都是 $a_n=1$ 的数字，笔者认为题目中提到展开的不唯一性的目的就在于此。

的，那么 (a,b) 内的所有数字都是三进制展开后 $a_k=1$ 的数字，设 a、b 三进制展开后的系数为 α_n,β_n，那么

$$\alpha_k=1,\alpha_{k+1}=\cdots=0,\text{ or }\alpha_k=0,\alpha_{k+1}=\cdots=2$$

$$\beta_k=1,\beta_{k+1}=\cdots=2,\text{ or }\beta_k=2,\beta_{k+1}=\cdots=0$$

不难验证 $F(a)=F(b)$.

根据 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续，我们补充 G 上的定义之后可知 F 在 G、$\mathcal{C}$ 与 G 的衔接处连续，不难说明 F 在整个 $[0,1]$ 上连续。

题目 3. 常数分割构造康托集。考虑区间 $[0,1]$，和给定的实数 $\xi\in(0,1)$.[4]

在构造的第 1 阶段，去掉 $[0,1]$ 中部长度占比为 ξ 的开区间；在第 2 阶段，分别去掉两个闭区间中部长度占比 ξ 的开区间 $\cdots$ 以此类推，最终得到的集合记作 $\mathcal{C}_\xi$.

证明：

1. 补集 $G_\xi=[0,1]\backslash C_\xi$ 由若干总长度为 1 的开区间构成。
2. $m_*(C_\xi)=0$

提示：第 k 次操作后，剩余区间总长度为 $(1-\xi)^k$.

解答：根据提示是显然的，就不过多赘述了。

题目 4. 类康托集。尝试构造一个闭集 $\hat{\mathcal{C}}$，在第 k 阶段去除了 2^{k-1} 个位于中心的长度为 l_k 的开区间，并且

$$l_1+2l_2+\cdots+2^{k-1}l_k+\cdots<1$$

1. 只要 l_j 足够小，$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$ 就能成立，证明：$m_*(\hat{\mathcal{C}})=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k>0$.
2. 证明：$\forall x\in\hat{\mathcal{C}}$，存在点列 $\{x_n\}\to x$，且 $x_n\in I_n$，I_n 是 $\hat{\mathcal{C}}$ 补集的开区间之一，且 $|I_n|\to 0$.
3. 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完备的，且不包含任何开区间。
4. 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 不可数。

解答：

1. 只需注意到第 n 阶段后剩余区间 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 的总长度 $m_*(\hat{\mathcal{C}}_n)=1-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}l_k$.
2. 任取给定的 $x\in\hat{\mathcal{C}}$，令 A_n 表示 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 中包含 x 的那个闭区间，I_n 是 A_n 下一次操作后去掉的开区间，并取 I_n 的中点为 x_n，于是 $|x-x_n|\leqslant|A_n|\to 0$，即 $x_n\to x$，并且因为 $I_n\subset A_n$，$|I_n|\to 0$.
3. $\hat{\mathcal{C}}$ 中没有孤立点：任取给定的 $x\in\hat{\mathcal{C}}$，取 I_n 距离 x 较近的端点作为 x_n，x_n 作为端点故有 $x_n\in\hat{\mathcal{C}}$，并且 $|x_n-x|\leqslant|A_n|\to 0$.

   类似于康托集，也能证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全不连通的，所以不包含任何开区间。
4. 注意到 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 包含了 2^n 个闭区间，我们用二进制数字对其进行编号：$I^n_{0\cdots00},I^n_{0\cdots01},\cdots,I^n_{1\cdots11}$. 任取一个 $a\in[0,1]$ 并把它写成二进制小数：$a=0.0110\cdots$，定义区间 I^a_n 就是取 a 的小数点后 n 位作为下标对应的 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 的闭区间，例如

   $$a=0.0110\cdots,n=4,I^a_4=I_{0110}\subset\hat{\mathcal{C}}_4$$

   最后，我们令

   $$x_a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^a_n$$

   一方面，上式这一交集并非空集，因为 $I^a_{n+1}\subset I^a_n$；另一方面，上式这一交集是独点集，因为 $|I^a_n|\to 0$. 因此 x_a 完全由 a 确定。

[4] $\xi=\frac{1}{3}$ 就对应了康托集的情况。

由此一来，我们就得到了 $\hat{\mathcal{C}}$ 和 $[0,1]$ 一一对应关系：$x_a \to a$，从而证明了 $\hat{\mathcal{C}}$ 不可数。

题目 5. 给定集合 E，令开集

$$\mathcal{O}_n = \{x : d(x, E) < \frac{1}{n}\}$$

证明：

1. 如果 E 是紧集，那么 $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.
2. 如果 E 是无界闭集或者有界开集，那么上式可能不成立。

解答：

1. 注意到：

$$\overline{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$$

因为 E 的导集就是所有和 E 距离为 0 的点。

如果 E 是紧集，即有界闭集，那么 $E = \overline{E}$.[4] 又因为 $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$，所以 $\mathcal{O}_n \searrow E$，同时 E 是有界的，故 $m(\mathcal{O}_n) < \infty$，由测度的下连续性[5]可得 $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.

2. 无界闭集的例子：$E = \mathbb{Z}$，$m(E) = 0$ 但 $m(\mathcal{O}_n) = \infty$；有界开集的例子：取 $E = [0,1]\backslash\hat{\mathcal{C}}$，那么根据本章第 4 题的 (2) 可知，任何 $x \in \hat{\mathcal{C}}$，都存在 E 上的点列 $x_n \to x$，这意味着 E 的导集包含 $\hat{\mathcal{C}}$，所以 $\overline{E} = [0,1]$. 因此 $m(\mathcal{O}_n) = 1 + \frac{2}{n} \to 1$，但我们熟知 $m(E) < 1$.

题目 6. 利用平移与伸缩性质证明：B 是 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 r 的球，那么 $m(B) = v_d r^d$，其中 $v_d = m(B_1), B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$.

解答：先任取 $\varepsilon > 0$，根据外测度的定义，可以取一个 B_1 的方体覆盖 $\{Q_i\}$，并使得 $m(\bigcup Q_i) = m(B_1) + \frac{\varepsilon}{r^d}$，通过变换 $x \mapsto rx$，就得到了 B 的方体覆盖 $\{Q_i'\}$，并且 $m(\bigcup Q_i') = m(B_1)r^d + \varepsilon$，这就证明了 $m(B) \leqslant m(B_1)r^d + \varepsilon$.

反之，可以取一个 B 的方体覆盖 $\{Q_i\}$，并使得 $m(\bigcup Q_i) = m(B_r) + \varepsilon$，通过变换 $x \mapsto \frac{1}{r}x$，就得到了 B_1 的方体覆盖 $\{Q_i'\}$，并且 $m(\bigcup Q_i') = \frac{1}{r^d}m(B_r) + \frac{\varepsilon}{r^d}$，这表明了 $m(B) \leqslant \frac{1}{r^d}m(B_r) + \frac{\varepsilon}{r^d}$.

让 $\varepsilon \to 0$，结合两个不等式则结论得证。

题目 7. 已知 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d)$ 是一个 d 元正数组，对于 $E \subset \mathbb{R}^d$ 定义

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \cdots, \delta_d x_d) : (x_1, \cdots, x_d) \in E\}$$

证明：只要 E 可测，δE 就可测，并且 $m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$.

解答：首先，对于矩体 R，显然有

$$m(\delta R) = \delta_1 \cdots \delta_d m(R)$$

对于一个有界可测集 E，和任意的 $\varepsilon > 0$，总存在一个开集 G 满足 $E \subset G, m(G) \leqslant m(E) + \varepsilon$，因为开集可以写成可列个几乎不交方体之并，自然 δG 就可以写成可列个几乎不交的矩体之并，从而

$$m(\delta G) = \delta_1 \cdots \delta_d m(G)$$

于是

$$m_*(\delta E) \leqslant m(\delta G) \leqslant \delta_1 \cdots \delta_d m(E) + \delta_1 \cdots \delta_d \varepsilon$$

[4]解释一下此处表述：实数空间上的紧集等价于有界闭集，而任何一个拓扑空间都满足闭集的闭包是它本身。不要搞混了。

[5]见笔记的定理 1.2.4，即教材 Corollary 3.3.

令 $\varepsilon \to 0$ 就得到

$$m_*(\delta E) \leqslant \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$$

反之，因为 $m(E) = m(\delta^{-1}\delta E)$，所以成立不等式：

$$m_*(E) \leqslant (\delta_1 \cdots \delta_d)^{-1} m(\delta E)$$

结合两个不等式可得 $m_*(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$.

下面我们说明 δE 是可测的。对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在开集 G 满足 $m_*(G - E) < \varepsilon/(\delta_1 \cdots \delta_d)$，对于 δE 而言就有

$$m_*(\delta G - \delta E) = m_*(\delta(G - E)) = \delta_1 \cdots \delta_d m_*(G - E) < \varepsilon$$

所以 δE 是可测的。

题目 8. L 是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性变换，$E \subset \mathbb{R}^d$ 是可测集，按照以下步骤证明 $L(E)$ 也是可测集：

1. 如果 E 是紧集，那么 $L(E)$ 也是紧集。由此可得如果 E 是 F_σ 集，那么 $L(E)$ 也是 F_σ 集。
2. 存在 M，使得 L 满足如下不等式：

$$|L(x) - L(x')| \leqslant M|x - x'|$$

我们能够看出 L 把任何一个边长为 l 的方体变换为边长为 $c_d M l$ 的方体，其中 $c_d = 2\sqrt{d}$.

现在，如果 $m(E) = 0$，即存在 E 的总体积 $\leqslant \varepsilon$ 的方体覆盖 $\{Q_i\}$，于是得到 $m_*(L(E)) \leqslant c'\varepsilon$，进而 $m(L(E)) = 0$，然后再使用教材的 Corollary 3.5[6]即可。

简而言之：证明线性变换下的 F_σ 集仍是 F_σ 集，零测集仍是零测集。

解答：

1. 有限维线性空间上的线性映射一定是连续映射，而连续映射把紧集映到紧集，所以 E 紧 $\Rightarrow L(E)$ 紧。

因为 $\mathbb{R}^d$ 是 σ 紧的空间，所以任何闭集都是至多可列个紧集的并，所以一个 F_σ 集是可列个紧集之并，即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

其中 F_n 是闭集，则对于每个 n，

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{n,j}$$

其中 $K_{n,j}$ 是紧集，所以

$$E = \bigcup_{n,j=1}^{\infty} K_{n,j}$$

进而

$$L(E) = \bigcup_{n,j=1}^{\infty} L(K_{n,j})$$

紧集 $L(K_{n,j})$ 也是闭集，所以 $L(E)$ 也是一个 F_σ 集。

2. 设 x 是边长为 l 的方体 Q 的一个顶点，那么 Q 内所有的点与 x 的距离都不超过 $\sqrt{d}l$，

$$|x - x'| \leqslant \sqrt{d}l \Rightarrow |L(x) - L(x')| \leqslant \sqrt{d}Ml$$

设 Q' 是以 x 为中心的、边长为 $2\sqrt{d}Ml$ 的方体，那么 Q' 外部的点与 x 的距离都不小于 $\sqrt{d}Ml$，所以 $L(Q) \subset Q'$，那么测度上就满足

$$m(L(Q)) \leqslant (2\sqrt{d}M)^d m(Q) \overset{\text{def}}{=} c' m(Q)$$

如此一来，零测集的体积为 ε 的方体覆盖在 L 下的像的体积就小于 $c'\varepsilon$，进而可知零测集的像也是零测集。

最后，可测集 E 可以表示成 $E = F \cap N$，F 是 F_σ 集而 N 是零测集，所以 $L(E) = L(F) \cap L(N)$ 是 F_σ 集

和零测集的并，于是 $L(E)$ 可测。

题目 9. 给出一个例子：存在一个开集 $\mathcal{O}$，满足 $\mathcal{O}$ 的闭包的边界有正的 Lebesgue 测度.

提示：考虑构造类康托集时，奇数次步骤时被去除的开区间之并。

这道题就是告诉你边界不一定是零测的，感觉考试不会考，先跳过。

题目 10. 这道题通过类康托集构造了一列 $[0,1]$ 单调递减的正连续函数，它的逐点极限是 Riemann 不可积的。

值得一提的是，Lebesgue 可积在逐点极限的意义下是封闭的，这是 Lebesgue 积分的优越性之一。同上，考试考的概率不大，先跳过。

题目 11. 令 A 是 $[0,1]$ 中十进制展开后不包含数字 4 的数的集合，求 $m(A)$.

解答： 可以像构造康托集一样给出 A 的构造：第一步挖去长度为 $\frac{1}{10}$ 的开区间，它的左边留 $\frac{3}{10}$，右边留 $\frac{6}{10}$，然后在剩下的闭区间上重复相同的操作。

不难证明 k 次操作后留下的闭区间总长度为 $\left(\frac{9}{10}\right)^k$，所以 $m(A)=0$.

题目 12. 我们熟知 $\mathbb{R}$ 上的开集都能被唯一地表示成至多可列个不相交开区间之并，但这一表述在 2 维以上的实数空间普遍不成立。证明：

1. $\mathbb{R}^2$ 上的开圆盘不能被表示成至多可列个互不相交的开矩形之并。
2. 连通开集 Ω 可以被表示成至多可列个互不相交的开矩形之并，当且仅当 Ω 自身就是开矩形。

解答：

1. 不妨假设 $\mathbb{R}^2$ 上的开圆盘 Ω 能被表示成至多可列个互不相交的开矩形之并，对于其中一个开矩形 E_1，取其边界上一点 $x\in\partial E_1$，满足 $x\notin E_1$，$x\in\Omega$，那么存在另一个 E_2 使得 $x\in E_2$，于是存在 x 的一个小邻域 $B(x,\varepsilon)\subset E_2$，然而 x 是 E_1 的边界点，x 的任何邻域都会和 E_1 有交集，即 $B(x,\varepsilon)\cap E_1\neq\varnothing$，进而得到 $E_1\cap E_2\neq\varnothing$，产生矛盾。
2. 如果
$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E_1\cup\bigcup_{n=2}^{\infty}E_n$$
并且 $E_1\cap\bigcup_{n=2}^{\infty}E_n=\varnothing$，根据连通性的定义可知要么 $E_1=\Omega$，要么 $\bigcup_{n=2}^{\infty}E_n=\Omega$. 如果是前者那么结论就得证了，如果是后者，就再考虑 $E_2\cup\bigcup_{n=3}^{\infty}E_n$，以此类推。最终得到 Ω 本身就是一个开矩形。

题目 13. 以下是有关 G_δ 集和 F_σ 集的讨论：

1. 证明闭集是 G_δ 集，开集是 F_σ 集。
   提示：如果 F 是闭集，考虑 $\mathcal{O}_n=\{x:d(x,F)<\frac{1}{n}\}$.
2. 给出一个是 F_σ 集但不是 G_δ 集的例子。
   提示：考虑可数的稠密集。
3. 给出一个既不是 G_δ 集也不是 F_σ 集的 Borel 集的例子。

解答：

1. F 是闭集，所以 $\overline{F}=F=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$，所以 F 是可列个开集之交，即 G_δ 集；对于开集，取其补集然后反过来论证即可。

这里再说一下另一种构造方式：设开集 G 包含的所有“有理闭球”为[7]

$$\mathcal{B}=\{\overline{B(q,d)}\subset G:q\text{是有理格点，}d\text{是有理数}\}$$

根据有理数的可数性，上述集合是可数的，我们将证明：

$$G=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B$$

从而 G 是一个 F_σ 集。

左式包含右式是显然的。设 $x\in G$，存在邻域 $B(x,r)\subset G$，选取一个有理点 q 满足 $|x-q|<\frac{r}{3}$ 和有理数 d 满足 $\frac{r}{3}<d<\frac{r}{2}$，则 $\overline{B(q,d)}\subset B(x,r)\subset G$，并且 $x\in\overline{B(q,d)}$，从而右式包含左式，结论得证。

2. 例如有理数集 $\mathbb{Q}$ 是稠密的 F_σ 集，利用 Baire 纲定理能证明它不是 G_δ 集。
3. $A=(\mathbb{Q}\cap(0,1))\cup((\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[2,3])$.

这里以后有机会再详细研究。

题目 14. $E\subset\mathbb{R}$，其外若尔当容量定义为

$$J_*(E)=\inf\sum_{j=1}^{N}|I_j|$$

其中 inf 对所有 E 的有限个区间的覆盖 $\{I_j\}$ 取值。

1. 证明：$\forall E, J_*(E)=J_*(\overline{E})$.
2. 构造一个可数集 $E\subset[0,1]$，满足 $J_*(E)=1$ 但 $m_*(E)=0$.

解答：

1. 注意到 $|I_j|=|\overline{I_j}|$.
2. 考虑 $E=\mathbb{Q}\cap[0,1]$，它的外测度是 0，但是外若尔当容量是 1，这是因为任何一个 $[0,1]$ 的子区间都一定包含有理数。

题目 15. 起初，人们用矩体覆盖的下确界来定义外测度，而非方体，即

$$m_*^{\mathcal{R}}(E)=\inf\sum_{j=1}^{\infty}|R_j|$$

其中 inf 对所有 E 的之多可列矩体覆盖 $\{R_j\}$ 取值。请证明这一定义和从方体出发的定义是等价的，即 $m_*(E)=m_*^{\mathcal{R}}(E),\forall E.$

提示：使用教材中的 Lemma 1.1，也就是笔记中的引理 1.2.1：如果 R 可以表示为若干内部不相交矩体 $R_i,i=1,2,\cdots,n$ 的并，则 $|R|=\sum_{i=1}^{n}|R_i|$.

解答： 由提示显然，不多赘述。

题目 16. B-C 引理（Borel-Cantelli Lemma）：假设 $\{E_k\}$ 是可数个可测集组成的集合族，并且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$$

令

$$E=\limsup_{n\to\infty}E_n\overset{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^d:x\in E_k\text{对于无限多个 }k\text{ 成立}\}$$

证明：E 可测，且是零测集。

[7] 实际上换成“有理开球”结论也成立。

解答： 因为 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$，其中每个 E_k 都是可测的，所以 E 也是可测的。

根据 $\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$ 可知任取 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$\sum_{k=N}^{\infty}m(E_k)<\varepsilon$$

所以

$$m(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}m(E_k)<\varepsilon$$

而

$$m(E)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\leqslant m(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k)<\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 可得 $m(E)=0$.

题目 17. 设 $\{f_n\}$ 是一列定义在 $[0,1]$ 上的可测函数，并且满足 $|f_n(x)|<\infty$ a.e. on $[0,1]$. 证明：存在一列正实数列 c_n 使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n}\to 0\text{ a.e. on }[0,1]$$

解答： 因为 $|f_n(x)|<\infty$ a.e. on $[0,1]$，所以

$$\lim_{k\to\infty}m\left(\left\{x:|f_n(x)|>\frac{k}{n}\right\}\right)=0$$

对于任意的 n，将 c_n 取得足够大，使得

$$m\left(\left\{x:|f_n(x)|>\frac{c_n}{n}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}$$

即

$$m\left(\left\{x:\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right|>\frac{1}{n}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}$$

令 $E_n=\left\{x:\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right|>\frac{1}{n}\right\}$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty$，令

$$E=\{x\in\mathbb{R}^d:x\in E_n\text{对于无限多个 }n\text{ 成立}\}$$

由 B-C 引理可得 $m(E)=0$，当 $x\in[0,1]-E$ 时，x 满足：$x\in E_n$ 对有限多个 n 成立，也就是 $\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right|>\frac{1}{n}$ 对有限多个 n 成立，即 $\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$ 只对有限多个 n 不成立。因为改变有限项的值不影响数列极限，所以

$$\frac{f_n(x)}{c_n}\to 0\text{ on }[0,1]-E$$

E 零测，故结论得证。

题目 18. 证明：任何一个可测函数都是连续函数列的 a.e. 极限。

解答： 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测，令 $B_n=[-n,n]$，由 Lusin Theorem 可知，存在闭集 $E_n\subset B_n$ 使得 $m(B_n\backslash E_n)<\frac{1}{2^n}$ 并且 f 在 E_n 上连续，再由 Tietze 延拓定理，可以把 f 延拓为 R 上的连续函数 f_n. 下面证明 $f_n\to f$ *a.e.*

设 x 不满足 $f_n\to f$，则存在无穷多个 n 使得 $x\in(B_n^c)\cup(B_n\backslash E_n)$，否则 n 充分大的时候就有 $f(x)=f_n(x)$.

又因为总能取到 n 使得 $n>|x|$，因此 $x\in B_n^c$ 只对有限多个 n 成立，因此 $x\in(B_n\backslash E_n)$ 对无穷多个 n 成立，从而有 $x\in\limsup(B_n\backslash E_n)$，所以

$$\{x|f_n\nrightarrow f\}\subset\limsup(B_n\backslash E_n)$$

由 B-C 引理可知后者是零测集，所以 $\{x|f_n\nrightarrow f\}$ 是零测集，命题得证。

题目 19. 以下是关于集合运算 $A+B$ 的一些结论：

1. 如果 A，B 其一是开集，则 $A+B$ 是开集。
2. 若 A，B 都是闭集，则 $A+B$ 是可测的。
   提示：实际上可以证明 $A+B$ 是 F_σ 集。
3. 即使 A，B 都是闭集，$A+B$ 也可能不是闭集。

解答：

1. 任取 $x=a+b\in A+B$，$B(a,\varepsilon)\subset A$，则 $B(a,\varepsilon)+b\subset A+B$，而 $B(a,\varepsilon)=B(x,\varepsilon)$ 就是 x 的邻域，所以 A+B 是开集。
2. 只需证明闭集 + 紧集还是闭集，那么就有
$$A+B=A+\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A+B_n),B_n=B\cap\overline{B(0,n)}$$
   这里 B_n 是紧集，A 是闭集，所以 $A+B_n$ 是闭集，进而 $A+B$ 是 F_σ 集。
   下面证明闭集 + 紧集还是闭集：设 A 闭 B 紧，任取 $A+B$ 上的收敛点列 $z_n=a_n+b_n\in A+B$，$z_n\to z$，其中 b_n 有子列 $b_{k_n}\to b\in B$，[8] 则 $a_n=z_n-b_n\to z-b$，A 是闭集所以极限点在 A 内部，则 $z-b\in A$，$z=(z-b)+b\in A+B$，所以 $A+B$ 是完备集，完备集一定是闭集。
3. $A=\mathbb{Z}$，$B=\{n+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{Z}\}$，那么 $2+\frac{1}{n}\in A+B$，但 $2\notin A+B$.

题目 20. 按照以下步骤证明：存在闭集 A，B 满足 $m(A)=0$，$m(B)=0$，但 $m(A+B)>0$.

1. 在 $\mathbb{R}$ 上，令 A 是康托集 $\mathcal{C}$，$B=\frac{\mathcal{C}}{2}$，则 $A+B\supset[0,1]$.
2. 在 $\mathbb{R}^2$ 上，令 $A=I\times\{0\}$，$B=\{0\}\times I$，则有 $A+B=I\times I$.

题目 21. 证明：存在一个连续函数将一个可测集映为不可测集.

题目 22. 证明：不存在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 满足处处连续且
$$f(x)=\chi_{[0,1]}(x)\text{ a.e.}$$

解答： 假设这样的 f 存在，则 $f(1)=1$，f 连续所以存在 $\delta>0$ 使得 $|x-1|<\delta$ 时就有 $|f(x)-1|<\frac{1}{2}$，则 $x\in(1,1+\delta)\Rightarrow f(x)>\frac{1}{2}>0$. 因此
$$\{x|f(x)\neq\chi_{[0,1]}(x)\}\supset(1,1+\delta)\Rightarrow m(\{x|f(x)\neq\chi_{[0,1]}(x)\})\geqslant\delta>0$$
和 $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ $a.e.$ 矛盾，故原命题成立。

题目 23. 假设 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 是分别连续的，即固定 x 或者 y 时，f 关于另一个变量是连续的。证明 f 是可测函数。

提示：构造一个分段线性函数列 f_n，使其关于 x 逐点收敛到 f.

35. Give an example of a measurable function f and a continuous function g so that $f\circ g$ is non-measurable.

Hint: Let $g:C_1\to C_2$ as in Ex.34, with $m(C_1)>0$ and $m(C_2)=0$. Let $N\subset C_1$ be non-measurable, and take $f=\chi_{g(N)}$.

[8] 这里使用了紧集的另一个定义：任意无限子集都有聚点。

Use the construction in the hint to show that there exists a Lebesgue measurableset that is not a Borel set.

解答：设 C_1, C_2 是 $[0,1]$ 上的两个康托集，并且 $m(C_1) > 0, m(C_2) = 0$. 可以构造一个连续双射函数 $g : [0,1] \to [0,1]$ 使得 $f(C_1) = C_2$. 设 $N \subset C_1$ 且 N 不可测，定义 $f = \chi_{g(N)}$，则 $f \circ g = \chi_N$ 不可测，因为 $\{x|\chi_N > \frac{1}{2}\} = N$.

N 不可测，所以 N 不是 Borel 集，由 g 是连续双射函数可知 $g(N)$ 也不是 Borel 集，但是 $g(N) \subset C_2$ 是零测集，这就证明了存在不是 Borel 集的可测集，即 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.

5.2 Integration Theory

题目 4. f 在 $[0,b]$ 上可积，且
$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t, 0 < x \leqslant b$$
证明：g 在 $[0,b]$ 上可积，且
$$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x = \int_0^b f(t)\mathrm{d}t$$

解答：分析：积分区域是 $\mathbb{R}^2$ 上的 $E = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant b, x \leqslant t \leqslant b\}$，我们设 $h(x,t) = \frac{f(t)}{t}\chi_E$，$\mathrm{supp}(h) \subset [0,b] \times [0,b]$，由 $f(t)$ 可积得 $h(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可积，则由 Fubini 定理可得：
$$\begin{aligned}\int_0^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_0^b \left[\int_x^b \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t}\chi_E \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t)}{t}\chi_E \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)\mathrm{d}m\end{aligned}$$
故 g 在 $[0,b]$ 上可积。同时，E 也可以表示为：$E = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant b, 0 \leqslant x \leqslant t\}$，再由 Fubini 定理：
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)\mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t}\chi_E \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_0^t \left[\int_0^b \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^b f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

题目 6. f 在 $\mathbb{R}$ 上可积，并不意味着当 $x \to \infty$ 时 $f(x) \to 0$.

1. 构造一个 $\mathbb{R}$ 上得非负连续函数 f，使得 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积但 $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
2. 然而，如果假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且可积，则 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

解答：第一问的例子：令
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{[n, n+\frac{1}{n^3})}$$
再让 $g(x)$ 在每个区间端点附近“陡峭地”下降到零，使得积分有限，得到连续的 $f(x)$ 且
$$\int f(x)\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + C < +\infty$$
但 $\limsup\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

我们用反证法证明第二问：否则，存在 $A > 0$，使得对于任何的 $M_1 > 0$ 都存在 $|y_1| > M_1$ 使得 $f(y_1) > A$，因为 f 一致连续，所以存在 $\delta > 0$，使得只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{A}{2}$，于是我们考虑区间 $E_1 = (y_1 - \delta, y_1 + \delta)$，
$$x \in E_1 \Rightarrow |f(x) - f(y_1)| < \frac{A}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{A}{2}$$

我们再取 $M_2 > |y_1| + 2\delta$，又存在 $|y_2| > M_2$ 使得 $f(y_2) \geqslant A$，于是考虑区间 $E_2 = (y_2 - \delta, y_2 + \delta)$，

$$x \in E_2 \Rightarrow |f(x)| > \frac{A}{2}$$

以此类推，我们可以取到无限多个互不相交的 E_n，且在每个区间上都有 $|f(x)| > \frac{A}{2}$，这就导致了

$$\int |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)|\mathrm{d}x > \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta \cdot \frac{A}{2} = +\infty$$

矛盾。

题目 9. f 非负可积，对于 $\forall \alpha > 0$，设 $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$，证明：

$$m(E_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f$$

解答：

$$m(E_\alpha) = \int_{E_\alpha} 1\mathrm{d}m \leqslant \int_{E_\alpha} \frac{f(x)}{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\alpha}\int f$$

题目 11. 如果实值函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是可积的，并且在任何一个可测集 E 上的积分非负，则 f 几乎处处非负。

推论：如果 f 在任何一个可测集 E 上的积分都是零，则 f 几乎处处为零。

解答： 只需要考虑 $Z = \{f(x) < 0\}$，由于 $f(x)$ 是可测函数，所以 Z 是可测集，进而由题设条件可知

$$\int_Z f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

然而如果 $m(Z) > 0$，则 $f(x)$ 在一个正测集上恒小于零，意味着 $\int_Z f(x)\mathrm{d}x < 0$，矛盾。所以 $m(Z) = 0$，进而 f 几乎处处非负。

如果 f 在任何一个可测集 E 上的积分都是零，说明 f 和 $-f$ 都满足条件，所以都是几乎处处非负的，进而都是几乎处处为零的。

题目 13. 给出一个例子：两个可测集的和可能是不可测的。

解答： $A = \{0\} \times [0,1], B = N \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$，其中 N 是 $\mathbb{R}$ 上的不可测集。

题目 19. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是可积的，对于 $\forall \alpha > 0$，设 $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$，证明：

$$\int_{\mathbb{R}}^{d} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} m(E_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

解答： 我们考虑 $F : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$，$F(x, \alpha) = \chi_{E_\alpha}(x)$. 对 $F(x, \alpha)$ 应用 Fubini 定理即可：

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)} F(x,\alpha)\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{[0,+\infty)} \chi_{E_\alpha}(x)\mathrm{d}\alpha\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{[0,|f(x)|)} 1\mathrm{d}\alpha\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)} F(x,\alpha)\mathrm{d}m = \int_{[0,+\infty)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_\alpha}(x)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}\alpha = \int_{[0,+\infty)} m(E_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

5.3 Differentiation and Integration

题目 4. 证明：如果 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积，且 f 不恒为 0，则存在某个 $c>0$ 使得 $|x|\geqslant 1$ 时

$$f^*(x)\geqslant \frac{c}{|x|^d}$$

因此，f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上是不可积的。

解答： f 不几乎处处为零，则 $m(\{|f|>0\})>0$，又因为

$$\{|f|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f|>\frac{1}{n}\}$$

所以存在 n 使得

$$m(\{|f|>\frac{1}{n}\})>0$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n(0)}|f|=\int|f|>\frac{1}{n}m(\{|f|>\frac{1}{n}\})>0$$

所以存在 r 使得 $\int_{B_r(0)}|f|>0$，记 $B=B_r(0)$. 不妨设 $r>1$，$1\leqslant|x|<r$ 时，

$$f^*(x)>\frac{1}{|B|}\int_B|f|=c_0\geqslant\frac{c_0}{|x|^d}$$

$|x|\geqslant r$ 时，取 $B_{2|x|}(x)\supset B$，于是

$$f^*(x)\geqslant\frac{1}{m(B_{2|x|}(x))}\int_{B_{2|x|}(x)}|f|\geqslant\frac{1}{\lambda|x|^d}\int_B|f|=\frac{c_1}{|x|^d}$$

取 $c=\min\{c_0,c_1\}$ 即可。

因为 $|x|^{-d}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积，所以 f^* 也不可积。

题目 7. 证明：如果可测集 $E\subset[0,1]$ 满足存在某个 $\alpha>0$ 使得

$$m(E\cap I)\geqslant\alpha m(I)$$

对于任意区间 $I\subset[0,1]$ 都成立，则 $m(E)=1$.

解答： 用可测集几乎处处是密度点的那个结论，如果能证明一个可测集所有点都不是密度点，那它就是零测集。

取 $E^c=[0,1]\backslash E$，仍可测，其几乎每个 $x\in E^c$ 都是其密度点，但是

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{m(E^c\cap I)}{m(I)}=\lim_{|I|\to 0}\frac{m(I)-m(I\cap E^c)}{m(I)}\leqslant 1-\alpha<1$$

所以 $m(E^c)=0$，$m(E)=1$.

题目 16. 证明：若 $F\in BV([a,b])$，则：

$$\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x\leqslant T_F(a,b)$$

特别地，等号成立当且仅当 $F\in AC([a,b])$.

这里的 $T_F([a,b])$ 就是 F 在 $[a,b]$ 上的总变差，讲义里的写法是 $V_a^b(F)$.

解答： $x>y$ 时，

$$V_a^x(F)-V_a^y(F)=V_y^x(F)\geqslant|F(x)-F(y)|$$

所以
$$\frac{V_a^x(F)-V_a^y(F)}{x-y}\geqslant\frac{|F(x)-F(y)|}{x-y}$$
$F\in BV([a,b])$ 可知 F' a.e. 存在且有限，进而 $|F'|\in L^1[a,b]$，而且 $V_a^x(F)$ 是单调递增函数，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(F)$ a.e. 存在，则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(F)\geqslant|F'(x)|\text{ a.e.}$$
所以
$$\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(F)\mathrm{d}x\leqslant V_a^b(F)$$

等号成立时，
$$|F'(x)|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(F)\text{ a.e.}$$
$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(F)\mathrm{d}x=V_a^b(F)$$
所以 $V_a^x(F)\in AC[a,b]$，又因为
$$|F(x)-F(y)|\leqslant|V_a^x(F)-V_a^y(F)|$$
所以 $F\in AC[a,b]$.

反之，$F\in AC[a,b]$ 则
$$\int_{a_0}^{b_0}F'(x)\mathrm{d}x=F(b_0)-F(a_0),\forall[a_0,b_0]\subset[a,b]$$
$\forall\varepsilon>0$，可以取一个划分 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得
$$\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|>V_a^b(x)-\varepsilon$$
于是
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|F'(x)|\mathrm{d}x&\geqslant\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}F'(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|>V_a^b(x)-\varepsilon\end{aligned}$$
令 $\varepsilon\to0$ 得到
$$\int_a^b|F'(x)|\mathrm{d}x\geqslant V_a^b(F)$$
所以等号成立。

题目 19. 绝对连续函数将零测集映为零测集，将 Lebesgue 可测集映为 Lebesgue 可测集。

解答： 设 N 为零测集，$\forall\delta>0$，可以取一列互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}$ 覆盖 $U\supset N$，且 $\sum_{k=1}^\infty(b_k-a_k)<\delta$.

根据绝对连续函数的定义，$\forall\varepsilon>0$，
$$m(f(N))\leqslant m(f(U))\leqslant\sum_{k=1}^\infty|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$
所以 $f(N)$ 也是零测集。

Chapter1 Ex8 证明过连续函数把 F_σ 集映到 F_σ 集，进而 f 把可测集映到可测集。

题目 20. $F\in AC[a,b]$ 且单调递增，$A=F(a)$，$B=f(b)$. 证明：

1. 即使 F 严格单调递增，也有可能在一个正测度集合上满足 $F'(x) = 0$.
2. 存在一个满足上一问条件的 F，使得存在零测子集 $E \subset [A, B]$，但 $F^{-1}(E)$ 不可测。
3. 任意可测子集 $E \subset [A, B]$，$F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ 可测。

解答：

1. 令
$$F(x) = \int_a^x d_C(x)\mathrm{d}x$$
其中 $C \subset [a, b]$，是有正测度的康托集，$d_C(x)$ 是点 x 到集合 C 的距离. F 是绝对连续函数，$F'(x) = 0$ a.e. on C，且 F 严格单调递增：设 $a \leqslant x < y \leqslant b$，因为 C 不包含任何区间，所以 x, y 之间存在某个区间 $I \subset C^c$ 将其隔开，此区间长度为正，于是 $F(y) > F(x)$.
2. 仍考虑上一问的 F，注意到 F 把不交的开区间映到不交的开区间，令 $U = [a, b] \backslash C$，则可以将 U 表示成：
$$U = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$
所以
$$F(U) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (F(a_k), F(b_k))$$
因此
$$m(F(U)) = \sum_{k=1}^{\infty} (F(a_k) - F(b_k))$$
而
$$\begin{aligned} B - A = F(b) - F(a) &= \int_a^b d_C(X)\mathrm{d}x \\ &= \int_U d_C(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} (F(a_k) - F(b_k)) \end{aligned}$$
因此 $m(F(U)) = m(F[a, b])$，所以 $m(F(C)) = 0$，但是 C 有正测度，它有不可测子集 S. 所以 $E = F(S) \subset F(C)$ 是零测集，但是 $F^{-1}(E) = S$ 不可测。
3. 设开集 $\mathcal{O} \subset [A, B]$，Claim：
$$m(\mathcal{O}) = \int_{F^{-1}(\mathcal{O})} F'(x)\mathrm{d}x \tag{}$$
只需证明上式对开区间成立，由 F 单调递增，显然。
对于 G_δ 集 $G \subset [A, B]$，可设一列递减的开集 $\{\mathcal{O}_n\}$ 使得
$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$$
由于可取 $\mathcal{O}_1 \subset [A, B]$，故 $m(\mathcal{O}_n) \searrow m(G)$，且 $\chi_{\mathcal{O}_n} \to \chi_G$，$\chi_{F^{-1}(\mathcal{O}_n)} \to \chi_{F^{-1}(G)}$，$F^{-1}(G)$ 也可测，由 $(\star)$ 式，由控制收敛定理，可得
$$m(G) = \int_{F^{-1}(G)} F'(x)\mathrm{d}x$$
对于任何一个可测集 $E \subset [A, B]$，存在一个 G_δ 集 $G \subset [A, B]$ 使得 $E \subset G$，$m(G - E) = 0$，记 $Z = G - E$，$G = Z \sqcup E$，$F^{-1}(G) = F^{-1}(Z) \sqcup F^{-1}(E)$，$Z$ 零测，进而
$$\int_{F^{-1}(Z)} F'(x)\mathrm{d}x = 0$$
$$F'(x) = 0 \text{ a.e. on } F^{-1}(Z)$$

所以 $\{x \in F^{-1}(Z) : F'(x) > 0\} = F^{-1}(Z) \cap \{F'(x) > 0\}$ 是零测集，所以

$$F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$$

和

$$F^{-1}(G) \cap \{F'(x) > 0\}$$

相差一个零测集，后者可测所以前者也可测。

题目 21. $F \in AC[a,b]$ 且单调递增，$A = F(a)$，$B = f(b).f$ 是 $[A,B]$ 上的任意可测函数。

1. 证明 $f(F(x))F'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数。
2. 证明：如果 $f \in L^1[A,B]$，那么 $f(F(x))F'(x) \in L^1[a,b]$，且

$$\int_A^B f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(F(x))F'(x)\mathrm{d}x$$

解答：记 $G(x) = f(F(x))F'(x)$.

1. 注意到 $\forall t > 0$，

$$\begin{aligned}\{G(x) > t\} &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+} \left\{f(F(x)) > \frac{t}{r}\right\} \cap \{F'(x) > r\} \\ &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+} F^{-1}(f^{-1}(\frac{t}{r}, +\infty)) \cap \{F'(x) > 0\} \cap \{F'(x) > r\}\end{aligned}$$

f 是可测的，$f^{-1}(\frac{t}{r}, +\infty) \subset [A,B]$ 是可测集，根据 Ex20(3) 可知

$$F^{-1}(f^{-1}(\frac{t}{r}, +\infty)) \cap \{F'(x) > 0\}$$

是可测的，进而 $\{G(x) > t\}$ 是可测的。所以 G 是可测函数。

2. 由 Ex20(3) 中的 $(\star)$ 式可知，本题要证的换元公式对于 χ_G 成立，其中 G 是 G_δ 集。修改零测集上的取值不影响积分结果，进而对可测集上的示性函数也成立，进而对简单函数成立。
对于 $f \in L^1[a,b]$，设 $f = f^+ - f^-$，考虑 f^+，存在一列简单函数 $\varphi_n \nearrow f^+$ pointwise，则

$$\int_A^B \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_n(F(x))F'(x)\mathrm{d}x$$

且 $\varphi_n(F(x))F'(x) \nearrow f^+(F(x))F'(x)$. 由单调收敛定理，

$$\int_A^B f^+(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(F(x))F'(x)\mathrm{d}x$$

f^- 同理，结论得证。

题目 22. 如果 $F, G \in AC[a,b]$，证明 $FG \in AC[a,b]$，并有以下推论：

1. $F, G \in AC[a,b]$，则

$$\int_a^b F'(x)G(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x + F(x)G(x)|_a^b$$

2. $F \in AC[-\pi,\pi]$，且 $F(\pi) = F(-\pi)$. 证明：如果

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

使得 $F(x) \sim \sum_{\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$，则

$$F'(x) \sim \sum_{\mathbb{Z}} ina_n e^{inx}$$

3. 如果上一问中 $F(-\pi) \neq F(\pi)$ 会怎样？

解答：如果 F 绝对连续，则 F 在 $[a,b]$ 上有上界 M. 由定义，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $[a,b]$ 有限多个互不相交的子区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ 满足

$$\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$$

时，就有

$$\sum_{k=1}^n|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$$

此时

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|F(b_k)^2-F(a_k)^2|&=\sum_{k=1}^n|F(b_k)+F(a_k)||F(b_k)-F(a_k)|\\&\leqslant 2M\sum_{k=1}^n|F(b_k)-F(a_k)|<2M\varepsilon\end{aligned}$$

所以 F^2 绝对连续。注意到 $FG=\frac{1}{4}[(F+G)^2-(F-G)^2]$，所以也绝对连续。

1. $FG\in AC[a,b]\Rightarrow(FG)'\in L^1[a,b]$ 且

$$\int_a^b(F(x)G(x))'\mathrm{d}x=F(x)G(x)|_a^b$$

左侧展开即可。

2. 由上一问结论，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x&=[F(x)e^{-\mathrm{i}nx}]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}F(x)(e^{-\mathrm{i}nx})'\mathrm{d}x\\&=e^{-\mathrm{i}nx}[F(\pi)-F(-\pi)]+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{i}ne^{\mathrm{i}nx}F(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{i}ne^{\mathrm{i}nx}F(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x=\mathrm{i}na_n$，所以

$$F'(x)\sim\sum_{\mathbb{Z}}\mathrm{i}na_ne^{\mathrm{i}nx}$$

3. 此时结论不成立，例如取 $F(x)=x$，计算可得 $\mathrm{i}na_n=2(-1)^{n+1}$ for $n\neq0$. 然而 $F'(x)=1$，而 $\mathrm{i}na_n\neq0$.

题目 23. F 在 $[a,b]$ 上连续，

1. 若 $\forall x\in[a,b]$ 有 $D^+F(x)\geqslant0$，则 F 在 $[a,b]$ 上单调递增。
2. 若 $F'(x)$ 在 (a,b) 中处处存在，且 $|F'(x)|\leqslant M$，则 $|F(x)-F(y)|\leqslant M|x-y|$，$F$ 绝对连续。

解答：

1. 任取 $a\leqslant x<y\leqslant b$，希望证明 $F(y)-F(x)\geqslant0$，反证：假设存在一组 $x<y$ 使得不等式不成立，令

$$G(t)=F(t)-F(x)+\varepsilon(t-x)$$

则 $G(x)=0$，且对于充分小的 ε 有 $G(y)<0$，设 $t=t_0$ 时 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上取最大值，对于足够小的 $h>0$ 有

$$\frac{G(t_0+h)-G(t_0)}{h}\leqslant0$$

于是

$$\limsup_{h\to0^+}\frac{G(t_0+h)-G(t_0)}{h}\leqslant0$$

这与 $D^+(G)=D^+(F)+\varepsilon>0$ 矛盾。

2. $|F(x)-F(y)|=|\int_x^yF'(t)\mathrm{d}t|\leqslant\int_x^y|F'(t)|\mathrm{d}t\leqslant M|x-y|$. 此式意味着 F 满足 Lipschitz 连续，进而绝对连

续。

题目 32. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，证明 f 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in[a,b]$$

当且仅当 f 绝对连续且 $|f'(x)|\leqslant M$ a.e.

解答： 充分性在 Ex23 已经说明过了。

必要性：对于有限多个互不相交的子区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，令 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta<\frac{\varepsilon}{M}$，则

$$\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant M\sum_{k=1}^n|b_k-a_k|<M\delta<\varepsilon$$

所以绝对连续。而由

$$|f'(x)|=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$$

则立即可知 $|f'(x)|\leqslant M$.

第 6 章 其他

妈的，和 Borel，Cantor，Lebesgue，Caratheodory，Vitali，Lusin，Egorov，Tietze，Fatou，Riemann，Riesg，Fischer，Minkowski，Hölder，Urgsohn，Fubini，Tonelli，Hardy-Littlewood，Jordan 拼了！

——期末考前精神状态不太稳定的笔者。

题目 1. 设 $E_1,\cdots,E_k$ 是 $[0,1]$ 上的可测集，并且有

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n) > k-1$$

证明

$$m(\bigcap_{n=1}^{k} E_n) > 0$$

解答：直接取余集：

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n) = k - \sum_{n=1}^{k} m(E_n^c) > k-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} m(E_n^c) < 1$$

由次可加性，

$$m(\bigcup_{n=1}^{k} E_n^c) < \sum_{n=1}^{k} m(E_n^c) < 1$$

进而

$$m(\bigcap_{n=1}^{k} E_n) = 1 - m(\bigcup_{n=1}^{k} E_n^c) > 0$$

题目 2. 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 上的一列可测集，并且 $m(E_k)=1,\forall k$，证明：

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$$

解答：由于每个 $E_k=[0,1]-G_k$，G_k 是零测集，记 $\bigcup G_k = G$ 也是零测集，于是

$$\begin{aligned}1 = m(\bigcap_{k=1}^{\infty}[0,1]) &= m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \cup G) \\ &= m((\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) \cup G) \\ &= m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)\end{aligned}$$

题目 3. 给定 $\mathbb{R}$ 上一个可测集 E，则证明对任意 $0<a<m(E)$，存在 E 中的有界闭集 F 使得 $m(F)=a$.

这道题是 Chapter1 Ex27.

解答：$E=F\cup N$，其中 F 是 F_σ 集，N 是零集，则 $F\subset E$，设

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

其中 F_n 是闭集，不妨 $F_1\subset F_2\subset\cdots F_n\subset\cdots$，不会了。

题目 4. 给定一个可测集 E，证明对任意 $a>0$，存在区间 I 使得 $m(E\cap I)>am(I)$.

这道题是 Chapter1 Ex28.

题目 5. 对于任意 $\mathbb{R}$ 上正测集 A，证明 AA 包含带原点的一段区间。

这道题是 Chapter1 Ex29.

题目 6. 给一个有限测度的可测集 A，以及几乎处处有限并且几乎处处大于 0 的可测函数 f，证明对于任意 $m(A)>\delta>0$，存在 $B\subset A$ 以及正整数 k 使得

$$m(A-B)<\delta, \frac{1}{k}<f(x)<k, x\in B$$

题目 7. 作一个在任意开区间上都不连续的单调函数。

题目 8. 给一个定义在 $(0,1)$ 上的可测函数 f，证明存在数列 h_n 使得

$$h_n\to 0, \lim_{n\to\infty} f(x+h_n)=f(x)$$

题目 9. 给一个定义在 $[0,1]$ 上的可测函数 f，$E \subset \{x : f'(x) 存在\}$，如果 $m(E)=0$，证明 $m(f(E))=0$.

题目 10. $\mathbb{R}$ 上的 A 是一个正测集，证明存在 $x,y \in A$ 使得 $x-y$ 是有理数。

解答： 假设 $\forall x,y \in A$，$x-y$ 都不是有理数，$\forall n \geqslant 1$，设 $A_n = A \cap (\overline{B_n(0)} \backslash \overline{B_{n-1}(0)})$，于是设 $[-1,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，则 $A_{n,k} = A_n + r_k$ 互不相交，

$$m(\biguplus_{k=1}^{\infty} A_{n,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_{n,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_n)$$

然而

$$\biguplus_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \subset \overline{B_{R+1}(0)}$$

于是只能 $m(A_n)=0$，进而

$$m(A) = m(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$$

题目 11. 设 $\mathbb{R}$ 上的实值函数 f 满足 $\forall x,y \in \mathbb{R}$，

$$|f(x)-f(y)| \leqslant e^{|x|+|y|}|x-y|$$

证明 f 把零测集映到零测集。

解答： 设 E 是零测集，$E_n = E \cap [n,n+1]$，只需要考虑 f 把每个 E_n 映到零测集即可。在每个 $E_{n-1} \cup E_n \cup E_{n+1}$ 上，

$$e^{|x|+|y|} \leqslant e^{2|n+2|} = M_n$$

故

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M_n|x-y|$$

由上式可知，对于 $E_{n-1} \cup E_n \cup E_{n+1}$ 上的每个开区间 (a,b)，都有 $m(f((a,b))) \leqslant M_n(b-a)$，进而对于每个开集 $G_n \subset E_{n-1} \cup E_n \cup E_{n+1}$，都有 $m(f(G_n)) \leqslant M_n m(G_n)$，我们取 $E_n \subset G_n \subset E_{n-1} \cup E_n \cup E_{n+1}$，$m(G_n \backslash E_n) < \varepsilon$，则就有

$$m(f(E_n)) < m(f(G_n)) < M_n\varepsilon \to 0$$

于是结论得证。

题目 12. 两个紧支集可积的函数的复合一定可积吗？

解答： 不一定，例如：设

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

则 $s_n < 3$，取定义在 $[1,3)$ 上的函数：

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \chi_{[s_n, s_{n+1})}$$
$$f(x) = x^2 \chi_{[1,3)}$$

则 f, g 都是紧支集可积函数：

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1<+\infty$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{26}{3}<+\infty$$

但是

$$\int f(g(x))\mathrm{d}x=\int\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\cdot\chi_{[s_n,s_{n+1})}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty$$

题目 13. E 是一个有限测度的可测集，证明 E 上的非负可测函数 f 可积等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E:f(x)\geqslant n\})$$

收敛。

解答： 记 $E_n=\{x\in E:f(x)\geqslant n\}$，$F_n=\{x\in E:n\leqslant f(x)<n+1\}$，于是

$$E_n=\biguplus_{k=n}^{\infty}F_k,E=\biguplus_{k=0}^{\infty}F_k$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E:f(x)\geqslant n\})&=\sum_{n=0}^{\infty}m(E_n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}m(F_n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)m(F_n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}(n+1)\mathrm{d}x\\&>\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}(n+1)\mathrm{d}x-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F_n}1\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E:f(x)\geqslant n\})-m(E)\end{aligned}$$

综上所述，

$$\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E:f(x)\geqslant n\})-m(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x<\sum_{n=0}^{\infty}m(\{x\in E:f(x)\geqslant n\})$$

所以命题得证。

题目 14. E 是有限测度的可测集，f,g 是 E 上的可积函数，并且在 E 上的积分相同，证明下式至少有一个成立：

(1) $f=g$.

(2) 存在 E 的子集 M，f 在 M 上的积分大于 g 在 M 上的积分。

解答： 假设 (2) 不成立，于是任意可测子集 $M\subset E$ 有

$$\int_M f\mathrm{d}m\leqslant\int_M g\mathrm{d}m$$

然后取 $M^c=E\backslash M$，也是可测子集，所以上式不等号能反过来，进而使得等号成立，进而

$$\int_M(f-g)\mathrm{d}m=0$$

如果一个函数在任何可测集上积分都是零，那么它几乎处处为零，因此 (1) 成立。

题目 15. f 是定义在 $[0,1]$ 上的正可测函数，$0<a<1$，证明对 $[0,1]$ 的任意满足 $m(E)>a$ 的可测子集 E，有

$$\int_E f\mathrm{d}m>0$$

解答： 事实上：

$$[0,1]=\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\{x:\frac{1}{n+1}\leqslant f(x)<\frac{1}{n}\}\right)\uplus\{x:f(x)\geqslant 1\}\uplus\{0\}$$

我们设 $E_n=\{x:\frac{1}{n+1}\leqslant f(x)<\frac{1}{n}\}$，$F_n=\biguplus_{k=n}^{\infty}E_n=\{x:0<f(x)<\frac{1}{n}\}$，于是

$$\begin{aligned}&m\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\{x:\frac{1}{n+1}\leqslant f(x)<\frac{1}{n}\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)<+\infty\\&\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\text{ s.t.}\sum_{n=N}^{\infty}m(E_n)<\varepsilon\\&\Rightarrow m(F_N)<\varepsilon\end{aligned}$$

而 $E=(E\cap F_N)\cup(E\cap F_N^c)$，$m(E)>a$，$m(E\cap F_N)<\varepsilon\Rightarrow m(E\cap F_N^c)>a-\varepsilon$，只需取 $\varepsilon<a$，就有

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}m&=\int_{E\cap F_N}f\mathrm{d}m+\int_{E\cap F_N^c}f\mathrm{d}m\\&\geqslant\int_{E\cap F_N^c}f\mathrm{d}m\geqslant\frac{1}{N}(a-\varepsilon)>0\end{aligned}$$

题目 16. 设 $f\in L^1$，计算：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x-n)\frac{x}{1+|x|}\mathrm{d}x$$

解答： 先平移，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x-n)\frac{x}{1+|x|}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}\mathrm{d}x$$

根据 $|f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}|<|f(x)|$，$f(x)\in L^1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x$$

题目 17. 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，$f_n:B\to\mathbb{R}$ 是一列可测函数，且满足：

(1) $f_n \to f$ a.e.

(2) $\forall n$，$||f_n||_{L^2(B)} \leqslant 1$

求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n = \int_B f$$

解答：这道题展示了把集合拆成“好集合和小集合”两部分的思想。

$\forall \varepsilon > 0$，取可测集 $E \subset B$ 且 $m(B\backslash E) < \varepsilon$，则满足 $f_n \to f$ a.e. on E，由于 $m(E) < +\infty$，所以 $f_n \overset{L_1(E)}{\to} f$，存在 N 使得 $n > N$ 时 $\int_E |f_n - f| < \varepsilon$.

再考虑 $m(B\backslash E)$ 的部分，利用 Holder 不等式的 $p = q = 2$ 的情况：

$$\int_{B\backslash E}|f_n| \leqslant \sqrt{\int_{B\backslash E}|f_n|^2}\cdot\sqrt{\int_{B\backslash E}1}$$

$$(\int_{B\backslash E}|f_n|)^2 \leqslant \int_{B\backslash E}|f_n|^2\cdot m(B\backslash E)$$

$$\leqslant \varepsilon\int_B |f_n|^2 \leqslant \varepsilon$$

从而 $\int_{B\backslash E}|f_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$，再由 Fatou，

$$\int_{B\backslash E}|f| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{B\backslash E}|f_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$$

所以

$$\int_{B\backslash E}|f - f_n| \leqslant \int_{B\backslash E}|f| + \int_{B\backslash E}|f_n| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$$

所以

$$\int_B |f - f_n| = \int_{B\backslash E}|f - f_n| + \int_E |f_n - f| < 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \to 0$$

结论得证。

题目 18. f_n 是 $\mathbb{R}$ 上的一列可积函数，如果存在可积函数 f 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$$

证明 $f_n \to f$ a.e.

解答：这个题主要展示了一下可以对每一项都非负的级数用 MCT. 对左侧求和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$$

说明 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t) - f(t)|$ 可积，于是几乎处处有界，有界的地方就有 $f_n \to f$，所以几乎处处收敛。

题目 19. 收敛性反例集锦：

(1) 依测度收敛，但不依 L^1 收敛；

(2) 依 L^1 收敛，但不 a.e. 收敛；

(3) a.e. 收敛，但不依测度收敛；

(4) a.e. 收敛且依测度收敛到同一函数，但不依 L^1 收敛；

(5) 依测度收敛且依 L^1 收敛到同一函数，但不 a.e. 收敛。

(6) 依 L^3 收敛，但不依 L^2 收敛。

解答：

(1) $[0,1]$ 上定义 $f=0, f_k = k\cdot\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$. k 充分大时

$$m(\{|f_k-f|\geqslant\varepsilon\}) = m([0,\frac{1}{k}]) = \frac{1}{k}\to 0$$

但

$$\int |f_k-f|\mathrm{d}m = 1$$

(2) $[0,1]$ 上定义 $f=0, g_{k,i}=\chi_{[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}]}$，$k\in\mathbb{N}_+, 1\leqslant i\leqslant k$. 并设

$$f_1=g_{1,1}, f_2=g_{2,1}, f_3=g_{2,2}, f_4=g_{3,1},\cdots$$

(3) 令 $f=0, f_k=\chi_{[k,k+1]}$.

(4) $[0,1]$ 上定义 $f=0, f_k=k^2\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$.

(5) 这个例子过于抽象，不放上来了。

(6) 令

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{0.4}}\chi_{[k,k+1)}$$

和

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{0.4}}\chi_{[k,k+1)}$$

于是

$$\int |f-f_n|^3\mathrm{d}m = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{[k,k+1)}\frac{1}{k^{1.2}}\mathrm{d}m = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1.2}}\to 0$$

这是因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1.2}}$ 是收敛的，于是 f_n 依 L^3 收敛到 f，但

$$\int |f-f_n|^2\mathrm{d}m = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{0.8}} = +\infty$$

所以 f_n 不依 L^2 收敛。

题目 20. $f_n\in AC[0,1]$，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 收敛到 $f(x)$，且

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'(x)|\mathrm{d}x < +\infty$$

证明 $f\in AC[0,1]$.

解答：这道题展示了怎么对级数用 DCT. 令

$$g_n(t)=\sum_{k=1}^{n}f_k'(t)\mathrm{d}t$$

$$|g_n(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f_k'(t)|\mathrm{d}t\in L^1[0,1]$$

所以 $g_n(t) \to g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\mathrm{d}t$，所以

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (f(x) - f(0)) + f(0) \\
&= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x) - f_n(0)) \\
&= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t \\
&= f(0) + \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

再由积分的绝对连续性可知 $f(x)$ 绝对连续。

题目 21. f_k 是一列 $(0,1)$ 上的单调递增函数，且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \text{ a.e. } x \in (0,1)$$

证明：

$$\liminf_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$$

解答：一眼 liminf，鉴定为狠狠引用 Fatou 引理。

任何一个 $(0,1)$ 的区间 (a,b) 上，

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n'(x)\mathrm{d}x &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n'(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}(f_n(b) - f_n(a)) = 0
\end{aligned}
$$

一些细节就不补充了，反正不影响。

题目 22. 我们熟知：如果一个连续函数既以 1 为周期，又以 2π 为周期，则它一定是常值函数。

求证：把连续函数的条件改为局部可积函数，结论仍成立。

解答：只需令

$$g_a(t) = \int_{x_0+t}^{x_0+t+a} f(x)\mathrm{d}x$$

于是 $g_a(t)$ 就是既以 1 为周期，又以 2π 为周期的连续函数。然后再用 LDT 证明 f 时常数即可。

题目 23. $\forall \varepsilon > 0$，$f(x) \in AC[\varepsilon, 1]$，且

$$\int_0^1 x|f'(x)|^p\mathrm{d}x < +\infty, p > 2$$

证明：$x \to 0$ 时 $f(x)$ 存在。

解答：懒得写这个题了，就是 Holder 不等式的一个应用。考前记一下吧。